Teknillinen korkeakoulu Apiola/Ebeling
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/02/H/`

Laskuharjoitus 10 (viikko 46 , 19–22.11.2002)

Kirjallisuus: KRE Ch 5 “Laplace Transforms”
Linkkejä: `L/L14maple.mws ja .html, L/L14.html`

Alkuviikko (AV)

1. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla AA-tehtävä
   $y'' + 4y' + 13y = 20e^{-t}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 3.$

   Opastusta käänteismuunnokseen: Osamurtohajotelman kvadraattinen osa kannattaa täydentää neliöksi, jolloin päästään s-siirtolauseen avulla käsiksi tuttuihin muunnoksiin.

   Vast: $y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}\cos 3t + e^{-2t}\sin 3t$

2. Piirrä seuraavien funktioiden kuvaajat ja määritä niiden Laplace-muunnnokset, missä $u(t)$ tarkoittaa *Heavisiden funktiota*:

   (a) $f(t) = tu(t)$, (b)$f(t) = (t-1)u(t-1)$, c) $f(t) = 4u(t-1)\cos t$.

3. Määritä seuraavat käänteismuunnokset:

   (a) $F(s) = \frac{4(e^{-2s} - 2e^{-5s})}{s}$, (b) $\frac{e^{-3s}}{(s-1)^3}$, (c) $\frac{se^{-2s}}{s^2+\pi^2}$.

4. Ratkaise alkuarvotehtävä $y'' + 2y' = u(t-1), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

   (u on jälleen yksikköaskel- eli *Heavisiden funktio*.)

   Vast: $x(t) = -1/2\,e^{-2\,t} + 1/2 + u(t-1)\left(1/2\,t - 3/4 + 1/4\,e^{-2\,t+2}\right)$

5. Osoita, että funktio $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{kun } \ 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & \text{kun } \ t \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$ voidaan esittää muodossa $f(t) = \cos(t - \frac{\pi}{2})u(t - \frac{\pi}{2})$.

   Ratkaise sitten AA-tehtävä:

   $y'' + 3y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$

6. Oheisen virtapiirin komponenteilla ja syöttöjännitteellä on arvot: $C = 50\mu F$, $L = 2H$, $R = 100\Omega$, $e(t) = 50\sin 100t$ (V). Kytkin suljetaan hetkellä $t = 0$, jolloin $i_1(0) = 0, i_2(0) = 0$.

   Kirjoita diffyhtälösysteemi ja laske virtojen Laplace-muunnokset $I_1(s)$ ja $I_2(s)$.

   Jätetään loppuosa loppuviikoksi.

```
       /    C  i1(t)   i2(t)
    --/ ----||-->-------->--------
    |  K          |             |
    |             S             <
    o             S             >
e(t)              S  L          <  R
    o             S             >
    |             S             <
    |             |             |
    ------------------------------
```

   (Tässä siis `(SSSSSSS)`^{T} kuvaa kelaa (käämiä), eli induktanssia.)

Loppuviikko (LV)

1. Suorita AV-virtapiiritehtävä loppuun. Laske siis käänteismuuntamalla virrat $i_1(t)$ ja $i_2(t)$. Piirrä virtojen kuvaajat ja selvitä, miten ne käyttäytyvät suurilla t:n arvoilla.

2. Kolmen jousen (k_1, k_2, k_3) ja kahden massamöhkäleen m_1, m_2 muodostama mekaaninen systeemi:

```
              0              0
              |--> y1        |--> y2
    k1        |       k2     |        k3
           -----           ------
|-/\/\/\/\-| m1 |-/\/\/\/\-| m2 | -/\/\/\/\-|
|          |____|          |____|           |
|____________0_0_____________0_0____________|
```

   toteuttaa diffyhtälösysteemin (tee itsellesi selväksi):

$$\begin{cases} m_1 y_1'' = -k_1 y_1 + k_2(y_2 - y_1) \\ m_2 y_2'' = -k_2(y_2 - y_1) - k_3 y_2, \end{cases}$$

missä $y_1(t)$ ja $y_2(t)$ edustavat ao. massan poikkeamaa sen tasapainoasemasta (Vaimentamaton tapaus).

Olkoon vakioilla lukuarvot $m_1 = m_2 = 10, k_1 = k_2 = 20, k_3 = 40$. (yksiköt sopivia yhdistelmiä näistä: kg, m, s)

Määritä ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot $y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_1'(0) = 1, y_2'(0) = -1$.

Piirrä ratkaisufunktiot. (Ja voithan tehdä jousien ja massojen liikettä kuvaavan animaation, mutta se on ylimääräistä harrastusta.)

3. Ratkaise vaimennettu värähtelytehtävä:

$$y'' + 2y' + y = \delta(t) - u(t - 2\pi), y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Tässä herätteenä (ulkoisena voimana) on impulssi (vasaranisku) hetkellä $t = 0$ ja vakiovoima -1 ajanhetkestä $t = 2\pi$ alkaen. Piirrä ratkaisufunktio vaikkapa välillä $[0, 25]$.

4. Määritä konvoluutiolauseen $L(f * g) = (Lf)(Lg)$ avulla seuraavien funktioiden Laplace-käänteismuunnokset:

a) $\frac{1}{(s-a)^2}$ **b)** $\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$ **c)** $\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$

5. Johda konvoluutiolusetta apuna käyttäen yleinen kaava vaimentamattoman värähtelytehtävän $y'' + \omega^2 y = r(t), \quad y(0) = y_0, y'(0) = v_0$.

ratkaisulle.

Vast: $y(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) * r(t) + y_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$.

(Tähti ($*$) tarkoittaa konvoluutiota.)

6. Tarkastele massa-jousisysteemin vastetta neliöaaltoon $r(t) = u(t-1) - u(t-2)$, kun systeemiä kuvaa diffyhtälö

$y'' + 3y' + 2y = r(t)$, ja olkoot alkuehdot $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

(a) Ratkaise systeemi, voit ratkaisusi tueksi ottaa KRE-kirjan esimerkin EXAMPLE 4 ss. 271–273. Voit käyttää Maplea, kunhan ymmärrät kaikki vaiheet.

(b) Ota $r(t)$:ksi h:n levyinen yksikköpulssi, välillä $[1, 1+h]$ (siis pinta- ala $= 1$), ja ratkaise esim. arvoilla $h = 0.5, 0.2, 0.1$. Piirrä heräte ja vaste.

(c) Ota $r(t) = \delta(t-1)$ (Diracin δ), piirrä vaste ja vertaa (b)-kohdan kuviin. (Älä yritä piirtää herätettä.)

Laplace-muunnokset

Alla oleva taulukko ja nämä kaavat ovat koetehtäväpaperissa mukana.

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0)$, $(\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$, $\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{1}{s}F(s)$, $\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g), (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t)$

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$, $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos\omega t$	$\sin\omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Laplace-muunnokset Maplella. Maple soveltuu tietysti integrointiapualiseksi. Lisäksi Maplessa on pakkaus `inttrans`, joka ladataan komennolla `with(inttrans):`. [HAM]-kirjassa on käsitelty Laplace-muunnoksia ss. 181–185 (luku 10). Peruskomennot ovat `laplace(f,t,s);` ja `invlaplace(F,s,t);` (Mieti argumenttien järjestyksen logiikka, se on olennaisen tärkeä tietenkin.)

Osamurtokehitelmät

Nämä myös koetehtäväpaperissa.

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) < deg(Q)$
1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s - a$, otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{s-a}$.
2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bs + c$, tulee kehitelmään termi $\frac{Bs+C}{s^2+bs+c}$, jos halutaan operoida reaalisilla kertoimilla.
3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit $\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(s-a)^r}$ ja vastaavasti toisessa tapauksessa termit $\frac{B_1s+C_1}{s^2+bs+c} + \ldots + \frac{B_rs+C_r}{(s^2+bs+c)^r}$

Osamurto Maplella: `convert(F,parfrac,s);`