Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Apiola/Ebeling

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 1 (viikko 38 , 13 – 21.9.2001)

Harjoitukset

ti 12–14: AV: U356, Liitutaulu, *Astrid*
to 12–14: Y338c, ohjattu harjoitus, *Astrid ja HA*.
pe 10–12: LV: Liitutaulu+tietokone (Maple), *HA*

Luentoaiheita: `..L/L1.html, L2.html`. Näissä kirjallisuusviitteitä.

Alkuviikko (AV)

1. Määritä q siten, että yhtälösysteemi

$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ x + 7y - 6z = 6 \\ 3y + qz = t \end{cases}$$

on singulaarinen (eli ei 1-käs. ratk.). Miten tulee tällöin valita t, jotta systeemillä olisi äärettömän monta ratkaisua. Määritä tässä tapauksessa se ratkaisu, jolle $z = 1$.

2. Olkoon $\mathbf{u} = (7, 2, 5)$,$\mathbf{v} = (3, 1, 3)$ ja $\mathbf{w} = (6, 1, 0)$. Tarkista, että $3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} - \mathbf{w} = 0$.

Ratkaise tämän perusteella (tekemättä yhtään rivioperaatiota) yhtälösysteemi:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Olkoot Ab,Bb,Cb ja Db lineaarisen yhtälösysteemin liitännäismatriiseja.

$$Ab = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Bb = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Cb = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad Db = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & 16 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selvitä kussakin tapauksessa ratkaisujen lukumäärä (ei ratkaisuja, yksikäs. ratk., äärettömän monta). Viimeksi mainitussa tapauksessa selvitä myös vapaiden parametrien lukumäärä.

4. Kirjoita (HY):n $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ yleinen ratkaisu (eli kirjoita kaikki ratkaisut sopivien vektorien lineaarikombinaationa), kun A on riviekvivalentti matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kanssa.

5. Osoita, että vektorit $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)$ ovat `LRT` ja siten $\mathbb{R}^3$:n kanta,ja määritä vektorin $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ koordinaatit tässä kannassa.

6. Tarkastellaan lämmönjohtumista ohuessa metallilevyssä. Oletetaan, että johtumista tapahtuu vain levyn suunnassa, ja levyn reunoilla on annetut (ajan suhteen) vakiolämpötilat. Levyn lämpötilat eri pisteissä asettuvat ajan kuluessa arvoihin, jotka ovat ajan suhteen vakioita, tällöin puhutaan lämpötilajakauman tasapainotilasta ("steady state"). Tehtävänä on määrittää lämpötilajakauma levyssä tasapainotilan vallitessa.

tarkastellaan kuvan mukaista tilannetta:

```
   --- 20----20---20-----
  |    |     |    |    |
10----*-----*-----*---40
  |    |     |    |    |
10----*-----*-----*----40
  |    |     |    |    |
  -----20----20----20----
```

Kuvassa näkyvät annetut vakioreunalämpötilat (reunaehdot). Tehtävänä on laskea ratkaisuapproksimaatiot *:llä merkityissä sisäsolmupisteissä käyttäen seuraavaa periaatetta: Lämpötila levyn solmupisteessä on naapurisolmujen lämpötilojen keskiarvo.

Jos indeksoidaan solmupisteiden lämpötilat vaakarivijärjestyksessä: $T_1, \ldots T_6$, voidaan ryhtyä kirjoittamaan yhtälöitä tyyliin:

$T_1 = \frac{20+10+T_4+T_2}{4}, \ldots.$

Kirjoita koko 6×6- yhtälösysteemi "standardimuodossa".

Huom: Tasapainotilaratkaisu saadaan ns. *Laplacen yhtälön* $\nabla^2 T = 0$ ratkaisuna. Tässä esitettyyn likimääräismenettelyyn ns. *differenssimenetelmään* johdutaan korvaamalla osittaisderivaatat sopivasti erotusosamäärillä.

Ratkaiseminen jätetään LV:oon.

Loppuviikko (LV)

Huomaa: LV-harjoitukset eivät ole "tietokoneharjoituksia" sen enempää kuin "liitutauluharjoituksiakaan". Niissä on **mahdollisuus** kaikkeen, myös tietokoneen käyttöön. (Toki osa tehtävistä voi olla selkeästi tehtävänannoltaan tietokoneella. tehtäviä.)

Jos arvioin tehtävän vaativan tavallista enemmän aikaa, annan sille 1:tä suuremman pistearvon, joka näkyy suluissa.

1. Kokoa 2×2 olevat matriisit muodostavat vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Osoita, että 2×2 yläkolmiomatriisit muodostavat edellisen aliavaruuden.

2. (max 2 p.) Tutustu tähän: `http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/02/L/LA.html`, voit ottaa vastaavan `.mws`:n pohjaksi. Kirjoita viitteen `http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/00/L/G-J.html` Maple-työ `LinaerAlgebra`-tyylillä, `LA.mws/html`:n mallin mukaisesti. Tarkista rivioperaatiot `ref-` ja `rref`-aliaksia käyttäen. Selvitä, ratkaisujen "lukumäärä" (olemassaolo ja mahd. vapaiden parametrien määrä). Tarkista lopuksi komennolla `LinearSolve`.

3. (max 2 p.) Ratkaise [AV]-tehtävän 6 yhtälösysteemi Maplea käyttäen. Muodosta [AV]-tehtävän 6 kuvan mukainen 4×5 matriisi, jossa ovat annetut reunalämpötilat sekä lasketut sisälämpötilat oikeilla kohdillaan. Ota nurkkapisteiden lämpötiloiksi kahden naapurisolmun lämpötilojen keskiarvo. Piirrä kuva.

   Ohjeita:

   Tehtävässä riittää käytellä LinearAlgebra-kirjaston funktiota `LinearSolve`. Ratkaisuvektorin muokkaaminen matriisiksi onnistuu mukavasti, kun "viran puolesta"työarkilla harj1pohja.mws on määritelty funktio Reshape, joka on luettavissa myös tiedostosta `.../maple/v302.mpl` .

   Annetaan koodi myös tässä:

   ```
   Reshape:=(vek,m,n)->Matrix(linalg[matrix](m,n,convert(vek,list)));
   ```

   Funktio on tehty vastaamaan Matlabin funktion reshape käytöstä siinä tapauksessa, jossa vektori muutetaan annetun kokoiseksi matriisiksi.

   Lämpötilamatriisin rakentelu kannattaa hoidella (Matlabinomaiseen) tyyliin:

   ```
   Tsisa:=Reshape(T,2,3); # vektorissa T on ratkaisulämpötilat.
   Tiso:=Matrix(4,5,0);
   vaaka:=<15|20|20|20|30>;
   pysty:=...;
   Tiso[2..3,2..4]:=Tsisa;
   ...
   ```

   Piirtäminen komennolla `matrixplot` (muista with(plots):)

   ```
   matrixplot(Tiso,axes=boxed);
   ```

4. Määritä kanta (kolmesta parametrista riippuvalle) vektorijoukolle (tarkemmin sanottuna niiden virittämälle avaruudelle) $\begin{bmatrix} a-2b+5c \\ 2a+5b-8c \\ -a-4b+7c \\ 3a+b+c \end{bmatrix}$

   Voit laskea käsin tai hyödyntää Maplea sopivasti. Sovitaan, että saat käyttä (`L/LA.mws`-työarkin) aliaksia `ref` ja jopa `rref`, mutta et komentoa `LinearSolve`.

   Vihje: Kirjoita vektori sopivien sarakevektorien lineaarikombinaationa ja tutki ovatko `LRV/LRT`. Jos ovat `LRV`, niin mitähän teet?