Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 8 (viikko 45 , 7 – 9.11.2001)

Alkuviikko (AV)

1. Oheisen virtapiirin komponenteilla ja syöttöjännitteellä on arvot: $C = 50\mu F$, $L = 2H$, $R = 100\Omega$, $e(t) = 50 \sin 100t$ (V). Kytkin suljetaan hetkellä $t = 0$, jolloin siis $i_1(0) = 0, i_2(0) = 0$. Laske Laplace-muunnokset $I_1(s)$ ja $I_2(s)$ ja käänteismuuntamalla virrat $i_1(t)$ ja $i_2(t)$. Piirrä virtojen kuvaajat ja selvitä, miten ne käyttäytyvät suurilla t:n arvoilla.

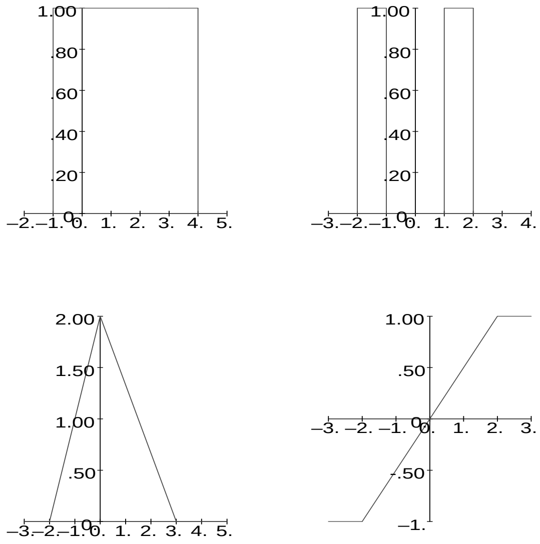
```
          /    C  i1(t)   i2(t)
        --/ ----||-->-------->--------
        |  K          |             |
        |             S             <
        o             S             >
   e(t)               S  L          <  R
        o             S             >
        |             S             <
        |             |             |
        ------------------------------
```

   (Tässä siis $(\texttt{SSSSSSS})^T$ kuvaa kelaa (käämiä), eli induktanssia.)

2. Piirrä seuraavien funktioiden kuvaajat ja määritä niiden Laplace-muunnnokset, missä $u(t)$ tarkoittaa *Heavisiden funktiota*:
   (a) $f(t) = tu(t)$, (b)$f(t) = (t-1)u(t-1)$, $f(t) = 4u(t-1)\cos t$.

3. Määritä seuraavat käänteismuunnokset:
   (a) $F(s) = \frac{4(e^{-2s} - 2e^{-5s})}{s}$, (b) $\frac{e^{-3s}}{(s-1)^3}$, (c) $\frac{se^{-2s}}{s^2+\pi^2}$.

4. Ratkaise alkuarvotehtävä $x'' + 2x' = H(t-1)$, $x(0) = 0, x'(0) = 1$.
   Tässä H on *Heavisiden funktio*, jota siis usein merkitään myös u:lla. (Hyvä tottua kumpaankin.)
   Vast: $x(t) = -1/2\, e^{-2\,t} + 1/2 + u(t-1)\left(1/2\, t - 3/4 + 1/4\, e^{-2\,t+2}\right)$



Kuva 1:

   Laske käsin, tarvittaessa Maplea rutiinilaskuissa (osamurto ym.) hyödyntäen. Kiinnitä erityistä huomiota siirtolauseiden ("s-shift. t-shift") käyttöön.

   Lopuksi voit ajaa Maplella vaikkapa [HAM]-esimerkin tapaan (saattaapa löytyä jopa aivan sama esimerkki).

   Piirrä samaan kuvaan heräte ja vaste (eli syöte ja tulos).

5. Lausu kuvan 1 kuvien esittämät funktiot Heavisiden funktioiden $H\ (u)$ yhdistelminä ja tarkista tulokset piirtämällä.
   Mieti lopuksi Matlab-lauseke, jolla saat määritellyksi Heavisiden funktion. (Kolme ASCII-merkkiä riittää, jos muuttujasi on yhden merkin mittainen)

6. Ratkaise AA-tehtävä

$$y''(t) + 3y'(t) + y(t) = g(t), \quad y(0) = 1, y'(0) = 1,$$

   missä

$$g(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1, 0 \le t < 1, \\ -1, 1 \le t < 2, \\ 0, t \ge 2, \end{cases}$$

Ohje: Kirjoita g-funktio ensin Heavisiden funktioiden avulla. Diffyhtälön ratkaisu voi olla monimutkaisehko, mutta älä välitä. Piirrä samaan kuvaan "heräte" ja "vaste", vaikkapa tyylikkäästi teksteillä varustettuna, kuten [HAM] s. 187, kuva 10.1. Voit kokeilla lopuksi myös "black-box"-tyyliä:

```
AE:=y(0)=1,D(y)(0)=1: ratk:=dsolve({dyht,AE},y(t),method=laplace);
```

Loppuviikko (LV)

1. Ratkaise vaimennettu värähtelytehtävä:

$$x'' + 2x' + x = \delta(t) - H(t-2\pi), x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

Tässä herätteenä (ulkoisena voimana) on impulssi (vasaranisku) hetkellä $t = 0$ ja vakiovoima -1 ajanhetkestä $t = 2\pi$ alkaen. Piirrä ratkaisufunktio vaikkapa välillä $[0, 25]$.

2. Määritä konvoluutiolauseen $L(f * g) = (Lf)(Lg)$ avulla seuraavien funktioiden Laplace-käänteismuunnokset:

a) $\frac{1}{(s-a)^2}$ **b)** $\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$ **c)** $\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$

3. Johda konvoluutiolusetta apuna käyttäen yleinan kaava vapaan vaimentamattoman värähtelytehtävän $y'' + \omega^2 y = r(t), \quad y(0) = y_0, y'(0) = v_0$.

Ratkaisuksi pitäisi saada tämä: $y(t) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) * r(t) + y_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$.

(Tähti $(*)$ tarkoittaa siis konvoluutiota.)

4. Laplace-muunnosta voidaan soveltaa matriiseihin ja vektoreihin alkioittain aivan kuten derivointia ym. Tätä formalismia käyttäen saadaan aivan henkeäsalpaavan kaunis kaava:

$$L\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}.$$

Siten e^{At} voidaan muodostaa myös laskemalla karakteristisen matriisin (miinus-merkkisen) käänteismatriisi ja käänteismuuntamalla se.

Ratkaise tätä hyväksi käyttäen AA-tehtävä

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Muista myös pysähtyä vertaamaan e^{At}:tä `exponential(A,t)`- tulokseen. Muistathan `map(laplace,fmat,t,s);` jne.

Tarkemmin sanottuna tehtävässä olisi sopivaa tehdä kaksi asiaa:

1) Soveltaa luennolla johdettua kaavaa yhtälöön $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$, jolloin ratkaisu saadaan käänteismuuntamalla $\mathbf{X}$ kaavassa $\mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1}(\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}(s))$

2) Laskea e^{At} yllä olevalla kaavalla, verrata ja ihastella.

5. Tutustu huolellisesti KRE-kirjan esimerkkiin EXAMPLE 4 ss. 271–273. Tee sitten "CAS-project" s. 274 kohta (a). Lisäplussaa saat tekemällä kohtaa (b) (partitiivi lienee sopiva sijamuoto).

6. Lähde: [Laode] ss. 586 – 590. (Jaetaan prujuja tarvittaessa) Tutustu Laode-kirjan "Grand Finale"-esimerkkiin $x'' + 4x' + 5x = \delta_1(t) + 2H_3(t)$, $x(0) = 0, x'(0) = 1$.

(Tässä merkitään H_c:llä GLJ:n $H(t-c)$:tä ja vastaavasti δ_c:llä $\delta(t-c)$:tä.) Selvitä samassa yhteydessä myös, miten osamurtohajoitelmat voidaan tehdä Matlabilla. (funktio realform täytyy kirjoittaa (=kopioida kirjasta) itse, se ei sisälly Laode- kokoelmaan.) Suorita toisaalta tämä esimerkki Maplella. Kerro, mitä ratkaisukuvasta näkyy.

Ratkaise sama tehtävä Matlabin `ode45`-funktiolla. Tässä täytyy kirjoittaa 2. kertaluvun yhtälö 1. kertaluvun systeemiksi. Erityisen kiintoisa kohta on *Diracin* δ:n numeerinen approksimointi. Kokeile siihen tyylin kuin ehdotetaan Laode:n s. 590 (mutta voit muutella myös siellä olevaa h-parametria.) Tee pieni tutkielma siitä, miten h-parametrin ja toleranssin valinta vaikuttaa tulokseen vertailtaessa analyyttisen ratkaisun kanssa.

Laplace-muunnokset

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0), \quad (\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$

Laplace-taulukko

$f(t)$	t^k	e^{at}	$\cosh at$	$\sinh at$	$\cos\omega t$	$\sin\omega t$
$F(s)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Funktioiden f ja g konvoluutio:

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$