Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

**Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2001**
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

**Laskuharjoitus 7** (viikko 44 , 29.10 – 2.11.2001)

**Lineaaristen faasitasonimityksiä**

- Lähdenoodi (epästabiili) "source node", nielunoodi (vahvasti stabiili) "sink node"
- Satulapiste "saddle point" (epästabiili)
- Keskus (stabiili) "center"
- Lähdespiraalipiste (epästabiili spiraalip.), nieluspiraali (vahvasti stabiili)

**Linearisointi ja (KRP):t = (TP):t**. Linearisointi tapahtuu laskemalla ensin kriittiset pisteet (KRP), eli oikean puolen 0-kohdat. (Käytetään myös nimitystä tasapainopiste (TP).) Jos $\mathbf{p_0}$ on KRP, niin linearisoidun systeemin matriisi on diff.yhtälön määrittelevän (vektoriarvoisen) funktion $\mathbf{f}$ Jacobin matriisi $(\frac{\partial}{\partial y_j} f_i(y_1, ...y_n))_{i,j}$ pisteessä $\mathbf{p_0}$.

## Alkuviikko (AV)

AV-tehtävät ovat osittain pieniä tutkielmia aiheesta, jota luennolla ei käsitellä, epälineaaristen autonomisten systeemien faasitasoanalyysista.

KRE 3.4 ss. 170 – 184, LAODE CH 11 ss. 368 – 402 Tehtävät ovat erityisen soveliaita Matlabille, siksi rohkenen antaa AV:ksi. Toisaalta myös Maplessa on työkaluja, kts. [HAM] s. 172 –

1. (Puhdas laskutehtävä) Määritä systeemin

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^2 + 2y + 3 \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}$$

   tasapainopisteet (TP).

   Linearisoi systeemi kunkin TP:n suhteen ja määritä niiden luonne.

   (Älä häiriinny, vaikka välillä käytetään derivaatalle piste-merkintää pilkun sijasta).

2. Opiskele heiluriyhtälöä vaikkapa KRE-kirjasta (ss. 176–177) (tai jostain muualta).

   (a) Selvitä, miten tällaiseen yhtälöön johdutaan:

$$\Theta'' + k \sin \Theta = 0 \quad (k = g/l)$$

   (b) Kirjoita yhtälö 1. kl. systeemiksi (tehty jo: harj6AV). Kirjoita se edelleen MATLAB-funktioksi

```
function ypilkku=fun(t,y)
ypilkku=[...;...]  % sarakevektori, kts. help ode23 tai ode45
```

   siis muotoon, jossa `ode23 tai ode45` sen haluavat. Piirtele ratkaisukäyriä aikatasossa sekä faasitasokäyriä. Piirrä myös pplane5-kuva.

   (c) Määritä kriittiset pisteet ja linearisoi yhtälö niissä. Älä tee linearisointia KRE-tyylillä, vaan suorita se yleispätevällä Jakobiaanitavalla (kts. yllä). Selvitä KRP:den , luonne ja stabiilisuus ja selvitä faasikuvan avulla heilurin käytös erilaisilla alkuarvoilla.

3. Opiskele LAODE kirjan s. 376 *Hyperbolisen tasapainopisteen* määritelmä ja merkitys. Esittele joitakin kirjan esimerkkejä pplnae5:ttä apuna käyttäen. Ratkaise tehtävät s. 383: 12 ja 13 (a).

4. Opiskele kettujen ja jänisten problematiikkaa KRE ss. 178 – 180 ja LAODE s. 394 – 401 (*Lotka–Volterra*).

   Suorita ainakin LAODE-tehtävät s. 401: teht. 5 ja 6 (voit katsoa näitäkin:teht. 3,4 ja s. 402 teht. 8)

   Voit esitellä myös joitakin LAODE-kirjan tekstin esimerkkejä Matlabin ode45:llä ja pplane5:llä havainnollistaen.

5. Lue LAODE-kirjasta 14.6 s. 516– *Chaos and the Lorenz Equation*. Kirjoita Lorenzin yhtälösysteemi Matlab-funktioksi.

   Lopuksi voit havainnollistaa Matlab-demolla:

   Kirjoita `help lorenz` ja kokeile sitten `lorenz`. Käyttele `START`- ja `STOP`-painikkeita.

## Loppuviikko (LV)

Aloitetaan Laplace-muunnosten käsittely.

1. a) Millä $p$:n arvoilla (jos millään) integraali $\int_0^\infty t^{-p}dt$ suppenee?

   b) Osoita, että $\int_0^\infty t^\alpha e^{-t}dt$ suppenee, kun $\alpha > -1$.

2. Paloittain jatkuva funktio $f$ on *exp-kertalukua*, jos on olemassa vakiot $K, c, T$ siten, että

   $|f(t)| \leq Ke^{ct}, \quad \forall t \geq T$

   a) Osoita, että $e^{t^2}$ ei ole exp-kertalukua.

   b) Onko exp-kertalukua olevan funktion derivaatta exp-kertalukua. Vihje: tarkastele vaikkapa funktiota $f(t) = \sin(e^{t^2})$.

3. Laske määritelmän perusteella seuraavien funktioiden Laplace-muunnokset:

   a) $f(t) = t^2$, b) $f(t) = te^{-t}$,

   c) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1,2] \\ 0, & t \notin [1,2] \end{cases}$ d) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

4. Laske seuraavien funktioiden $F(s)$ Laplace-käänteismuunnokset

   a) $\frac{s+5}{(s+1)(s-3)}$ b) $\frac{2s+6}{s^2+4}$ c) $\frac{s+8}{s^2+4s+5}$

5. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla (AA)-tehtävä: $x'' + 2x' + 5x = 1$, $x(0) = 0, x'(0) = 0$

6. (a) Selvitä käsinlasku-Maple-yhdistelmällä, miten Harj. 6 LV teht. 5:n ratkaisu toimii.

   (b) Ratkaise sama tehtävä Laplace-muunnoksen avulla.

## Laplace-muunnokset

Alla oleva taulukko ja nämä kaavat (+ joitakin lisäkaavoja) on koetehtäväpaperissa mukana.

**Määritelmä:** Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0)$, $(\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$,

**Laplace-taulukko**

| $f(t)$ | $t^k$ | $e^{at}$ | $\cosh at$ | $\sinh at$ | $\cos \omega t$ | $\sin \omega t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(s)$ | $\frac{k!}{s^{k+1}}$ | $\frac{1}{s-a}$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ | $\frac{a}{s^2-a^2}$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |

## Laplace-muunnokset Maple:ssa

[HAM] ss. 181–189 sisältää tiiviin Laplace-muunnos-esittelyn ja erityisesti Maple-käsittelyn.

Tässä on HAM-kirjassa omaksuttu suositus:

```
> with(inttrans):alias(L=laplace,IL=invlaplace,u=Heaviside):
```

Sen jälkeen voidaan komentaa tyyliin

```
> L(sin(t),t,s);IL(%,s,t);plot(u(t)-u(t-1),t=-1..1);
```

## Osamurtokehitelmät

Rationaalifunktioita käänteismuunnettaessa tarvitaan usein osamurtokehitelmiä.
Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä *deg*$(P) <$ *deg*$(Q)$ ja yhteiset tekijät on supistettu.

1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s - a$ (tarkoittaa, että tekijä ei esiinny korkeammassa potenssissa), otetaan kehitelmään termi $\frac{A}{x-a}$.

2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bx + c$, tulee kehitelmään termi $\frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$.

3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme $r$, otetaan termit

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-a)^r}$$

ja vastaavasti toisessa tapauksessa.

**Osamurrot Maple:ssa ja Matlabissa**

```
> convert(lauseke,parfrac,muuttuja)
>> help residue
```

### Matlabin odefun

Eräs tavoite on ainakin oppia sujuvasti käyttämään ODE-ratkaisijoita. Usein on tarve välittää muuteltavia parametreja t:n ja y:n lisäksi. Homma voisaan hoitaa ("vaarallisella tavalla") global-komennolla, sekä oikeaoppisesti tällä help ode45 komennon tulostuksesta poimitulla tavalla:

```
[T,Y] = ODE45(ODEFUN,TSPAN,Y0,OPTIONS,P1,P2...) passes the additional
    parameters P1,P2,... to the ODE function as ODEFUN(T,Y,P1,P2...), and to
    all functions specified in OPTIONS. Use OPTIONS = [] as a place holder if
    no options are set.
```

Tämä on erityisen hyödyllistä jänis-kettu-tehtävissä.