Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 4 (viikko 41 , 10 – 12.10.2001)

Nämä ovat viimeiset harjoitukset ennen 1. välikoetta. Kaikki 4. ensimmäisen harjoituksen (AV ja LV) tulevat mukaan. Välikokeessa ei pyydetä kirjoittamaan koodia, mutta (Maple/Matlab-) peruslukutaidosta saattaa olla hyötyä. Tietysti kaikki niin AV- kuin LV-hajoitustehtävät (ohjelmien käyttötekniikkaa lukuunottamatta) kuuluvat välikokeessa osattaviin. Luentoalue menee poikki jossain viikon puolenvälin paikkeilla, ilmoitetaan tarkemmin ke.

Alkuviikko (AV)

1. Muodosta lineaarinen yhtälösyteemi alla olevalle virtapiirille ja ratkaise virrat.

```
              8 V
            <-----
       I1    |
----<---- | |---------
|         |         |
<                   <
> 1 Ohmi      1 Ohmi >
<                   <
|     0.5 Ohmia     |
------\/\/\/--->-----|
|             I3    |
<                   |
>                   |
< 2 Ohmia       I2 \/
>                   |
|         |         |
----<---- | |---------
          |
        16 V
      <------
```

```
    Kirchhoffin virtalaki:

Virtapiirin jokaisessa pisteessä pätee:
tulevien virtojen summa =  lähtevien
summa.

    Kirchhoffin jännitelaki:
Virtapiirin jokaisessa suljetussa sil-
mukassa ulkoisen jännitelähteen
jännite = jännitehäviöiden summa.

   Ohmin laki: U=RI
```

2. Seuraava Matlab-istunto määrittelee matriisin A ja vektorin b. (Voit leikata/liimata latex-tiedostosta H/harj4.tex (no, tuskin kannattaa).)

```
>> A=[1 -1 1 0 0 2;1 1 2 4 1 2;0 2 1 4 3 1;1 -3 0 -4 -2 1]
>> b= [0; 3; 2; 0]>> Ab=...
```

Suorita Gaussin rivioperaatiot vaikkapa tyyliin (sopivasti indeksejä vaihtaen):

```
[m,n]=size(A); b=ones(m,1);Ab=[A,b]
format rational
pivot=Ab(1,1)
for i=2:m
   Ab(i,:)=Ab(i,:)-(Ab(i,1)/pivot)*Ab(1,:)
   pause  % Jos haluat katsoa joka vaiheen, muuten poista.
          % jatkuu ENTER:llä
end
```

Mitkä ovat johtavat sarakkeet? Kirjoita ratkaisut (käsin), montako vapaata parametriä?

Suorita tarkistukseksi komennot

`rref(A), rank(A)`. Varmista, että osaat lukea ratkaisut `rref`- muodsta. Mitä kertoo `rank` ?

3. Määritä q siten, että yhtälösysteemi

$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ x + 7y - 6z = 6 \\ 3y + qz = t \end{cases}$$

on singulaarinen. [1] Miten tulee tällöin valita t, jotta systeemillä olisi äärettömän monta ratkaisua. Määritä tässä tapauksessa se ratkaisu, jolle $z = 1$.

4. (a) Miksi lineaarisella yhtälöryhmällä ei voi olla tasan kahta ratkaisua. (Havainnollista myös geometrisesti 2×2 ja 3×3- tapauksissa.)

(b) Osoita, että jos $m \geq n$ ja jos Gaussin algoritmin kuluessa jokaiselta päälävistäjän alapuoliselta sarakkeen osalta (tai itseltään päälävistäjältä)

[1] Singulaarinen: ei yksikäsitteistä ratkaisua.

löytyy nollasta poikkeava alkio (pivotiksi kelpaava), niin systeemillä on joko 1-käsitt. ratk. tai ei lainkaan ratkaisua.

(c) Osoita, että (HY):llä $Ax = 0$ on aina joko 1-käsitteinen ratkaisu tai äärettömän monta ratkaisua. Osoita myös, että jälkimmäinen toteutuu aina, kun $n > m$ (sarakkeita enemmän kuin rivejä.)

5. Olkoon V vektoriavaruus (VA) ja olkoot W_1 ja W_2 sen aliavaruuksia (AA). Mitkä seuraavista joukoista ovat V:n aliavaruuksia ja mikä ei. (a) $W_1 \cap W_2$, b) $W_1 \cup W_2$, (c) $W_1 + W_2 = \{u + v | u \in W_1, v \in W_2\}$

   Esitä todistus tai vastaesimerkki ja havainnollistus $\mathbb{R}^3$:ssa.

6. Virittävätkö vektorit $(0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1)$avaruuden $\mathbb{R}^4$? Onko kyseessä $\mathbb{R}^4$:n kanta?

   Lausu vektori $v = (1,2,3,4)$ näiden vektorien lineaarikombinaationa. Onko esitys yksikäsitteinen?

Loppuviikko (LV)

1. (a) Osoita, että polynomit $p_1(t) = 2 + t$, $p_2(t) = 1 + t^2$, $p_3(t) = 1 - t^2$ ovat *LRT* vektoriavaruudessa $\mathcal{C}^1$. (Yhtä hyvin polynomiavarudessa $\mathcal{P}$ tai vieläkin suppeammassa, korkeintaan astetta 2 olevien polynomien muodostamassa VA:ssa.)

   (b) Osoita, että funktiot $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$ ja $f_3(t) = \cos(t + \frac{\pi}{3})$ ovat *LRV* $\mathcal{C}^1$:ssä.

   (c) (a) Osoita, että funktiot $\cos 3t, \sin 3t, t\cos 3t, t\sin 3t$ ovat LRT.

2. (a) Osoita muodostamalla sopiva kanta, että korkeintaan astetta n olevien polynomien muodostaman VA:n $\mathcal{P}_n$ dim $= n + 1$.

   (b) Osoita, että kaikkien polynomien avaruus $\mathcal{P}$ on ääretönulotteinen.

3. (a) Matriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ on *rref*-muodossa. Määritä vastaavan HY:n ratkaisujoukko sopivien vektorien viritelmänä (”*span*”).

   (b) Määritä matriisien A ja A^T nolla-avaruudet kantavektorien viritelminä, kun

```
>>  A=reshape(1:35,5,7)
>>  AT = A'
```

4. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

   (a) Määritä sarakeavaruuden kanta.
   (b) Määritä riviaruuden kanta.
   (c) Määritä nolla-avaruuden (ytimen) kanta.
   (d) Lausu rivivektorit/sarakevektorit rivi/sarakekantavektorien avulla.

   Miten näiden dimensiot suhtautuvat toisiinsa. Perustyökalu on `rref`. Tarkistukseen esim. `rank, null`.

5. Lisäksi viime viikon (harj 3 LV) tehtävät 4,5,6

Lineaarialgebran kertausta

Lineaarinen riippuvuus/mattomuus, LRV/LRT

Lineaarinen riippumattomuus/riippuvuus (LRT/LRV), virittäminen
Vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^m$ ovat *lineaarisesti riippumattomia*, jos vektoriyhtälöllä

$$x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n = 0$$

on vain triviaaliratkaisu $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Päinvastaisessa tapauksessa (siis jos muitakin ratkaisuja kuin 0-ratkaisu on), vektorijoukkoa sanotaan *lineaarisesti riippuvaksi* (LRV).
Muistammehan, että tällainen vektoriyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa matriisi × vektori = vektori (tässä 0-vektori). (sarakeajattelu $\Longleftrightarrow$ riviajattelu) Vrt. esim. teht. 2b), jossa mennään päinvastaiseen suuntaan.
Kysymys palautuu siten homogeeniyhtälön ratkaisujen lukumäärän selvittämiseen (onko vain yksi vai useita).
Virittäminen. Vektorijoukko $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ **virittää** avaruuden V, jos $\forall \mathbf{v} \in V \;\; \exists c_1, \ldots, c_k$ siten, että $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$.

Kanta ja dimensio

Avaruuden **kanta** tarkoittaa vektorijoukkoa, joka a) on lin. riippumaton ja b) virittää koko avaruuden.
Avaruuden **dimensio** on luku n, joka ilmaisee maksimimäärän LRT vektoreita,

joka avaruuteen mahtuu. Avaruudessa, jonka dim = n, on siten n kpl. LRT vektoreita, mutta jokainen n+1 vektoria (tai enemmän) käsittävä joukko on LRV.

Jos tunnetaan avaruuden dimensio = n, niin mikä tahansa n vektoria käsittävä LRT joukko on kanta. Samoin mikä tahansa koko avaruuden virittävä n:n vektorin joukko on kanta.