Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 3 (viikko 40 , 2 – 5.10.2001)

Alkuviikko (AV)

1. Todista: Jos y_1 ja y_2 ovat (HY):n $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ratkaisuja, niin mielivaltainen lineaarikombinaatio $y = C_1y_1 + C_2y_2$ on myös.
2. (a) Ratkaise (AA)-tehtävä $8y'' - 2y' - y = 0, \quad y(0) = -0.2,$ $y'(0) = -0.325$ (Älä ujostele käyttää Matlabia lineaariseen yhtälösysteemiin.)

   (b) Muodosta yleinen ratkaisu yhtälölle $y'' + 2ky' + k^2y = 0$.
3. Muodosta yleinen ratkaisu yhtälölle $16y'' - 8y' + 5y = 0$.

   sekä reaalisten että kompleksisten kantafunktioiden avulla.

   Ratkaise lisäksi (AA)-tehtävä $y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$ kumpaakin kantaa käyttäen ja totea, että saat saman tuloksen.
4. Johda (vaimentamattoman) harmonisen värähtijän ratkaisun $y(t)$ kaava, kun alkuehtoina käytetään yleisiä symboleja $y(0) = y_0, y'(0) = v_0$. Merkitse normaaliin tapaan $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ja yhtälöhän on $my'' + ky = 0$.

   Saata kaava myös muotoon $y(t) = C\cos(\omega_0 t - \delta)$ (eli määritä C:n ja δ:n lausekkeet y_0:n,v_0:n ja ω_0:n avulla.
5. 100:n gramman massa venyttää jousta 5 cm. Massa pannaan liikkeelle antamalla sille tasapainoasemassa alaspäin suuntautuva alkunopeus 10 m/s. Ei ilmanvastusta, ei kitkaa. Määritä massapisteen asema $y(t)$ ajan funktiona. Milloin massapiste sivuuttaa ensimmäisen kerran tasapainoasemansa? Kuinka monta värähdysjaksoa syntyy minuutissa?
6. Ratkaise alkuarvotehtävä $\begin{cases} y'' + 4y' + 13y = \cos t \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$

   "reseptin mukaan"
   1) Homog. yht. (HY) karakt. yht. avulla
   2) Yrite y_p epähomogeeniyhtälön (EHY) erityisratkaisun löytämiseksi.
   3) Integroimisvakiot alkuehdoista.

Loppuviikko (LV)

1. Tarkastellaan vaimentamatonta värähtelyä ($c = 0$) ja resonanssitapausta ($\omega = \omega_0$).

   (a) Selitä, miksi yrite $a\cos\omega t + b\sin\omega t$ ei voi johtaa tulokseen.

   (b) Perimätieto kertoo, että kannattaa yrittää muotoa $y_p = t(a\cos\omega t + b\sin\omega t)$.

   Osoita tieto oikeaksi ja johda samalla a:n ja b:n lausekkeet.

   Saat käyttää Maplea apuna, mutta ei tuo kohtuuton ole käsinlaskunakaan (ja aivan yhtä arvokas suoritusmielessä).
2. Jouseen, jonka jousivakio $k = 2$ (N/m), on ripustettu 2:n kg:n massa. Systeemi on nesteessä, jonka aiheuttama vastusvoima on lukuarvoltaan sama kuin nopeus (lausuttuna m/s). Systeemiin kohdistuu ulkoinen voima $r(t) = 3\cos 3t - 2\sin 3t$ (N). Määritä tasapainotilaratkaisu ("steady state") ja kirjoita se muotoon $R\cos(\omega t - \delta)$.

   Piirrä heräte ja vaste samaan kuvaan, piirrä myös alkuehtoa $y(0) = 1, y'(0) = 0$ vastaava ratkaisu.

   Jos käytät Maplea, niin käytä sitä derivointi- ja sievennysapukeinona, sovitaan kuitenkin, että voit käyttää dsolvea (AA)-osuuteen (transienttiin), kunhan varmistat, että osaat periaatteessa laskea sen käsin.
3. Tarkastellaan värähtelevää systeemiä, jota kuvaa AA-tehtävä
$$y'' + \frac{1}{4}y' + 2y = 2\cos\omega t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2.$$
   (a) Määritä tasapainotilaratkaisu (TP eli SS ("steady state"))
   (b) Määritä tämän TP-ratkaisun amplitudi syöttötaajuuden ω funktiona ja piirrä kuva tästä $\omega \to C^*(\omega)$-funktiosta.
   (c) Määritä maksimiamplitudi ja vastaava kulmataajuus ω sekä piirrä tätä taajuutta vastaava heräte ja TP-vaste samaan kuvaan.
4. Tarkastellaan vaimentamatonta värähtelysysteemiä
$$y'' + y = 3\cos\omega t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2.$$
   (a) Määritä ratkaisu, kun $\omega \neq 1$ ja saata se muotoon, josta näkyy amplitudi ja vaihekulma.
   (b) Piirrä amplitudi ω:n funktiona. (c) Määritä ja piirrä ratkaisu, kun $\omega = 1$.

(d) Piirrä ratkaisukäyrä arvoilla $\omega = 0.7$, $\omega = 0.8$, $\omega = 0.9$.

(e) Muutetaan alkuarvoiksi $y(0) = 1, y'(0) = 1$. Piirrä ratkaisukäyrät samoilla ω:n arvoilla saataviin ratkaisuihin kuin kohdassa d). (Tässä riittää käyttää `dsolve`-komentoa.)

5. Tarkastellaan vaimennettua värähtelysysteemiä

$$y'' + 0.125y' + y = r_k(t), \quad y(0) = 2, y'(0) = 0,$$

missä $r_1(t) = 3\cos(0.3t), r_2(t) = 3\cos t, r_3(t) = 3\cos(3t)$.

(a) Piirrä kutakin herätettä $r_k(t)$ vastaava ratkaisu ja heräte samaan kuvaan (siis 3 eri kuvaa). Valitse riittävän pitkä aikaskaala, jotta alkutransientti ehtii vaimentua mitättömäksi. Tarkkaile kuvan perusteella TP-ratkaisun amplitudin ja vaihekulman suhdetta vastaaviin herätesuureisiin.

(b) Piirrä ns. faasikuva, ts. y' y:n funktiona. Tämän saat helposti ottamalla t:n käyräparametriksi ja piirtämällä siis parametrimuodossa käyrän $[y(t), y'(t)]$. (Maplessa muuten sama kuin kahden käyrän piirto, mutta $t = 0..b$ tuodaan listasulkujen sisään. Matlabissa muodostetaan vektorit `y` ja `ypilkku` ja sitten vaan `plot(y,ypilkku)`

6. Tästä voi halutessa kehittää projektin, josta on mahdollista saada lisäpisteitä, sanotaan max 4. Tutustuminen ja peruskokeilu ja esittely pe 5.10 – normaali rasti. Lisäpiirteiden kehittelyyn annetaan aikaa sopimuksen mukaan, esittely jossain LV-harjoituksessa.

Projekti: Heiluri-animaatio.
Tutustu ja kokeile.
Modifioi yleiselle vaimennetulle systeemille.
Kokeile joihinkin yllä oleviin tehtäviin.

Aloita työarkista:
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/maple/varaht1.mws`

(Koodin listaus on myös alla, samoin työarkin alkuperäinen lähdeviite.)

```
http://matta.hut.fi/matta/deltampl/delta1/index.html
Sovellukset
  Värähtelevä jousi

restart;
yht:= m*diff(x(t), t$2)+k*x(t)=0;
alkuehdot:= x(0)=0, D(x)(0)=10;
rtk:= dsolve({yht, alkuehdot}, x(t));
```

```
rata1:=subs({k=1, m=1}, rtk);
plot(rhs(rata1), t=0..4*Pi);

with(plots): with(plottools):
jousi:= proc(ala, yla, paa, jaksot)
  local ampl, jakso;
  ampl:= 3;
  jakso:= (yla-ala-2*paa)/jaksot;
  plot(
  [[ampl*sin(2*Pi*r/jakso),
  r+ala+paa, r=0..jaksot*jakso],
  [0, ala+r, r=0..paa],
  [0, yla-r, r=0..paa]], color=black);
  end:

  kappale:= proc(hor, lev, kor)
  rectangle([-0.5*lev, hor+0.5*kor],
  [0.5*lev, hor-0.5*kor], color=gray)
  end:

  varahtelija:= proc(y0, t0)
  local lev, kor, paa, lepo, y1;
  lev:= 20; kor:= 10; paa:= 5; lepo:= 50;
  y1:= -lepo+subs(t=t0/(2*Pi), subs(y0,x(t)));
  display(
  rectangle([-50, 0], [50, 5], color=gray),
  kappale(y1, lev, kor),
  jousi(y1+kor/2, 0, 5, 5));
  end:
display(seq(varahtelija(rata1, u), u=0..39), insequence=true, axes=none,
  scaling=constrained);
```