Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 2 (viikko 39 , 26 – 28.9.2001)

Alkuviikko (AV)

1. Ratkaise (AA)-tehtävä $y' - 2xy = 1, \quad y(0) = -0.5$

   Tässä näyttää siltä, että (EHY):n erikoinen olisi helppo löytää, mutta huomaat pian, että luonnolliset yritteet eivät toimi.

   Ratkaise vaan sitten kiltisti integroivan tekijän menettelyllä.

   Integrointi johtaa *erf*-funktioon, Maple antaa sen suoraan, voit myös konsultoida KRE-kirjaa hakusanalla *erf*. Lausu siis ratkaisu *erf*:n avulla.

   Piirrä suuntakenttäpiirros vaikkapa `dfield5`:llä (jos haluat, voit käyttää myös Maplen `DEtools`-pakkauksen `DEplot`-funktiota. (kts [HAM] s. 169)

   Valitse alkuarvoja y_0 väliltä $(-1, -0.5)$ yrittäen löytää kriittistä arvoa y_0, joka jakaa ratrkaisukäyrät plus tai miinus ääretöntä lähestyviin. (Tuo kriittinen ratkaisukäyrä on rajoitettu.) Käytä hyväksesi *erf*-funktion ominaisuutta $\lim_{x\to\infty} erf(x) = 1$ laskeaksesi tarkan arvon y_0:lle.

2. Tarkastellaan (AA)-tehtävää $xy' = 4y, \quad y(0) = 1$.

   (a) Osoita, että tehtävällä ei ole ratkaisua. Osoita, että tämä ei ole ristiriidassa $\exists_1$-lauseen kanssa. (Huom: Lauseen avulla *ei voi todistaa epäeksistenssiä*, koska lauseen ehdot eivä ole välttämättömät.)

   (b) Vaihdetaan alkuehdoksi: $y(0) = 0$. Miten nyt on ratkaisujen laita.

   (c) Mitä voit sanoa alkuehdon $y(x_0) = y_0$ tapauksessa, jos $x_0 \neq 0$,
   (1) suoraan ratkaisukaavan avulla, (2) $\exists_1$-lauseen avulla.

3. Muodosta *Picardin* iteraatiojonon muutama termi (AA)-tehtäville

   (a) $y' = x + y, \quad y(0) = 0$ (b) $y' = x + y, \quad y(0) = -1$
   (c) $y' = y^2, \quad y(0) = 1$.

   Määritä myös tarkka ratkaisu.

   LV-tehtävässä palataan asiaan Maple-hommana.

4. Sovella *Picardin* iteraatiota (tuttuakin tutumpaan) (AA)-tehtävään

   $y' = y, \quad y(0) = 1$. Osoita, että iteraatiojono lähestyy ratkaisufunktiota $y(x) = e^x$.

5. Ratkaise alkuarvotehtävä $y' = t^2 - y, \ y(0) = 1$ Eulerin menetelmällä. Vertaa ratkaisua tarkkaan ratkaisuun. Käyttäytyykö virhe odotetulla tavalla $(O(h))$? Laske arvot $y_1, ..., y_n$ seuraavasti:

   Käsipelillä, väli $[0, 0.2]$,

   a) $h = 0.2, n = 1$, b) $h = 0.1, n = 2$, c) $h = 0.05, n = 4$

   Matlabilla Väli $[0, 2]$, a) $h = 0.2$, b) $h = 0.1$, c) $h = 0.05$.

6. (Olkoon vaihteeksi $x(t)$.) Olkoon alkuarvotehtävänä $x' = x, \quad x(0) = 1$, jonka ratkaisu hyvin tunnetaan: $x(t) = e^t$.

   Osoita, että jos lasketaan likiarvo $x_n = x_h(t_n)$ EM:llä pisteessä $t = t_n$ käyttäen askelpituutta h, niin $x_h(t_n) = c(h)^{t_n}$, missä $c(h) = (1 + h)^{1/h}$.

   Osoita tämän nojalla, että kiinteällä $t = t_n$ pätee $\lim_{h\to 0} x_h(t) = e^t$. (Vrt. Picard-tehtävään 4)

Loppuviikko (LV)

1. Muodosta *Picardin* iteraatiojonoa pitemmälle kuin AV-tehtävässä samoille (AA)-tehtäville (a), (b), (c) ja lisäksi vielä (d): lle.

   (a) $y' = x + y, \quad y(0) = 0$ (b) $y' = x + y, \quad y(0) = -1$
   (c) $y' = y^2, \quad y(0) = 1$. (d) $y' = 3\frac{y}{x}$

   Laske myös tarkka ratkaisu Maplella ja piirrä se ja iteraatiojonon funktioita. (Jos tuntuu liian pitkältä, niin jätä yksi pois, hyvä olis saada kaikki yhteisesti katetuksi (vaikka parityöskentelyssä sopimalla).

   Malli: `L/L4Picard1.html`, kts. myös [HAM] ss. 162–165 (`dsolve`)ja s. 126 *Picard–Lindelöf*

2. Eulerin menetelmän etenemistä on helppo seurata rakentamalla hyvin vähäeleinen skripti tähän tapaan. (Tässä on diffyhtälönä siis $y' = y$)

```
f=inline('y','x','y')
x0=0;X=x0;y0=1;Y=y0;h=0.25;clf; hold on
x1=x0+h;y1=y0+h*f(x0,y0);X=[X,x1];Y=[Y,y1];x0=x1;y0=y1;
[X' Y'], plot(X,Y);shg
```

Selvitä, mitä tässä tapahtuu ja kokeile. Iterointi sujuu Matlab-ikkunassa nuoli-ylös-näppäimellä toistamalla riviä 3. Välillä voi aina käydä rivillä 4. Piirrä myös tarkka ratkaisu samaan kuvaan.

Muuttele parametreja, myös diffyhtälöä.

3. Tarkastellaan (AA)-tehtävää

$$y' = \frac{3t^2}{(3y^2-4)}, \quad y(1) = 0.$$

(a) Laske EM:llä ratkaisuapproksimaatiot pisteissä $t = 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$ käyttäen askelta $h = 0.1$.

(b) Tee sama askeleella $h = 0.05$.

(c) Vertaa tuloksia.

(d) Piirrä suuntakenttä ja ratkaisuapproksimaatioita, sekä EM-ratkaisuja. Osaatko selittää, miksi EM toimii kohtuullisesti alussa, mutta kelvottomasti lopussa?

4. Tarkastellaan (AA)-tehtävää

$$y' = \frac{2\sqrt{y-\ln t}}{t} + \frac{1}{t}, \quad y(1) = 0$$

välillä $t \in [1, 1.8]$ Ratkaise tehtävä

a) Eulerin menetelmällä askelpituudella $h = 0.1$,

b) Heunin menetelmällä askelpituudella $h = 0.2$,

c) RK4- menetelmällä askelpituudella $h = 0.4$.

Määritä tarkka ratkaisu Maple:n `dsolve`-komennolla ja laske sen avulla virheet, piirrä ja taulukoi kussakin tapauksessa.

Huomaa, että näillä askelpituuksien valinnoilla funktion arvojen laskentamäärät ovat samat.

5. Huomasimme, että eksponentiaalinen kasvumalli, ns. *Malthus'n laki* $y' = ky$ ei toimi USA:n väestödataan pitkällä aikavälillä. Mallia voidaan tarkentaa lisäämällä sopiva kasvua rajoittava termi, tällöin johdutaan ns. logistiseen kasvulakiin:

$y' = ay - by^2$

USA:n väestödataan liityen *Verhulst* arvioi v. 1845 arvot $a = 0.03$ ja $b = 1.610^{-4}$, kun t mitataan vuosissa ja väkiluku $y(t)$ miljoonissa.

(a) Ratkaise tehtävä ($y(0) = 5.3$) Eulerin menetelmällä käyttämllä askelpituussa $h = 10$

(b) rk4:llä käyttäen n. nelinkertaista askelta (voit kokeilla pienempiäkin)

(c) Matlabin `ode45`:llä.

(d) Laske analyyttinen ratkaisu Maplella (kyseessähän on *Bernoullin yhtälö.*

Piirrä kuvia ja laske kaikissa tapauksessa ratkaisujen arvot annetuissa taulukkopisteissä. (ode45-tapauksessa onnistuu ainakin sovittamalla dataan splini funktiolla spline, joka on maailman helppokäyttöisin.) kts. `http://www.math.hut.fi/teaching/v/matlab/opas.html#splinit`

6. Tarkastellaan yhtälöä $y' = -2\alpha(t-1)y$. Ratkaise aluksi analyyttisesti (saat käyttää Mapleakin.)

Totea kuvasta ja derivaattaehdosta yhtälön stabiilisuus/epästabiilisuusalueet. Ota kuvassa ja aina tarvittaessa vaikkapa $\alpha = 5$.
Ratkaise yhtälö sekä Eulerilla että BE:llä. Sopivia arvoja voisivat olla vaikkapa $h = 0.2$, väli: $[1, 4.5]$, $y(1) = 1$.
Vertaa kokeellisesti stabiilisuukäyttäytymistä teorian ennustamaan ja pane merkille, miten epästabiilisuus käytännössä ilmenee.
Tämä tehtävä soveltuu erityisen hyvin Maplella tehtäväksi, se on pitkälle ideoitu [HAM] sivulla 124, myös Euler ja BE ovat valmiina. (Koodit saa kurssin maple-hakemistosta.)

AA-tehtävän ratkaisun olemassolo ja yksikäsitteisyys

Lause $\exists_1$ (vrt. KRE s. 53 Lauseet 1 ja 2)
(AA) $\quad y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$

Olkoot f ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ jatkuvia suorakulmiossa

$$R = \{(x,y) | |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}.$$

Tällöin AA-tehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu $x \mapsto y(x)$, joka on määritelty välillä $|x - x_0| < \alpha$.

$\alpha = min(a, \frac{b}{K})$, missä K on $|f|$:n arvojen yläraja R:ssä: $|f(x,y)| \leq K, \quad x \in R$

Huom! Jatkuvuusoletuksesta seuraa, että f ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ ovat rajoitettuja, koska suorakulmio R on suljettu.

Diff. yhtälöiden numeerisia menetelmiä

1-askelmenetelmiä

Annettu diff. yhtälö(systeemi): $x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$

Eulerin menetelmä $x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), \quad x(t_0) = x_0$ GKV $= O(h)$ (GKV=**G**lobaali **k**atkaisu**v**irhe)

Heunin menetelmä $x^*_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), \quad x(t_0) = x_0$
$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}h(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x^*_{n+1}))$.
GKV $= O(h^2)$

Klassinen Runge-Kutta (RK4)

$$\begin{cases} k_1 = hf(t_n, x_n) \\ k_2 = hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2} \\ k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(t_n + h, x_n + k_3) \\ x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

GKV$= O(h^4)$

Taylorin menetelmä $y(t+h) = y(t) + hy'(t) + ... + \frac{h^p y^{(p)}}{p!} + O(h^{p+1})$, missä $y'(t) = f(t, y(t)), y''(t) = \frac{d}{dt}f(t, y(t))$ (eli derivoidaan ketjusäännön avulla, sijoitetaan y'(t):n paikalle $f(t, y(t))$ ja jatketaan näin.

"Backward Euler" (BE) on *implisiittisten menetelmien* kantaäiti $x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$.

Stabiilisuus

Yhtälöä sanotaan `stabiiliksi` pisteessä (t, y), jos $f_y(t, y) < 0$, systeemin tapauksessa J_y:n spektri on vasemmassa puolitasossa (om. arvojen reaaliosat < 0), missä J_y on Jacobin matriisi derivoituna y-muuttujien suhteen.

Numeerinen menetelmä on stabiili, jos kokonaisvirhe pysyy rajoitettuna. Tämä merkitsee Eulerin menetelmän kohdalla ehtoa:
$-2 < hf_y(t, y) < 0$

Matlab-koodeja

`http://www.math.hut.fi/teaching/v/matlab/mathews/`

Listataan tämä, muita ovat mm. `meuler.m`, `heun.m`, `milne.m`, `taylor.m`

```
function [T,Y] = rk4(f,a,b,ya,m)
% [T,Y] = rk4(f,a,b,ya,m)
% Runge-Kutta solution for y' = f(t,y) with y(a) = ya.
% f  is the function, input.
% a  is the left endpoint, input.
% b  is the right endpoint, input.
% ya is the initial condition, input.
% m  is the number of steps, input.
% T  is the vector of abscissas, output.
% Y  is the vector of ordinates, output.
h = (b - a)/m;
T = zeros(1,m+1);
Y = zeros(1,m+1);
T(1) = a;
Y(1) = ya;
for j=1:m,
  tj = T(j);
  yj = Y(j);
  k1 = h*feval(f,tj,yj);
  k2 = h*feval(f,tj+h/2,yj+k1/2);
  k3 = h*feval(f,tj+h/2,yj+k2/2);
  k4 = h*feval(f,tj+h,yj+k3);
```

```
  Y(j+1) = yj + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
  T(j+1) = a + h*j;
end
```