Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 12 (viikko 49 , 5 – 7.12.2001)

Keskiviikon AV-harjoitus pidetään normaalisti *Jörö*:ssä. LV-harjoitus huipentuu *Antti Ukkosen* projektiesitykseen (n. 1/2 h).

Maple-avustusta

Ota käyttöön `http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/01/L/L36tod.mws` .

Alkuviikko (AV)

1. Klassisessa kokeessaan v. 1910 herrat *Rutherford* ja *Geiger* osoittivat, että radioaktiivisessa prosessissa emittoituvien α- hiukkasten lukumäärä sekunnissa on kuvattavissa satunnaismuuttujalla X, joka on Poisson-jakautunut. Oletetaan, että X:n odotusarvo $\mu = 0.5$. Millä todennäköisyydellä havaitaan 2 tai useampia α- hiukkasia sekunnissa.

2. Olkoon X tietyn maantiellä olevan havainnointipisteen sivuuttavien autojen lukumäärä minuutissa aikavälillä 23–24. Oletetaan, että X on Poisson-jakautunut, odotusarvona $\mu = 5$. Millä todennäköisyydellä autoja havaitaan vähemmän kuin 5 minuutin aikana.

3. Tutki kokeellisesti binomijakauman lähestymistä kohti Poissonin jakaumaa, kun $n \to \infty$, $p \to 0$, $np = \mu$. Voi ottaa lähtökohdaksi vaikka esimerkin KRE Exa 2, s. 1081. Tee pieni tutkielma (taulukko + kuvat) siitä, minkälaisilla n:n ja p:n arvoilla Poissonin jakauma antaa käyttökelpoisen approksimaation.

4. Oletetaan, että lentokentälle saapuvan matkustajan odotusaika T (min) noudattaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on kolmiomuotoa:

$$f(t) = \begin{cases} a + bt, & 30 \leq t \leq 90 \\ 0 & \text{muuten,} \end{cases}$$

missä $a > 0$ ja $b < 0$ ovat vakioita ja $a + 90b = 0$.

(a) Määritä vakiot a ja b sekä kertymäfunktio F.

(b) Millä todennäköisyydellä matkustajan odotusaika on vähintään $40min$ ja enintään 60 min? Entä yli 60 min?

(c) Määritä matkustajan odotusajan odotusarvo ja varianssi.

5. Laatikko sisältää 20 sulaketta, joista 5 on rikkinäistä. Valitaan laatikosta satunnaisesti 3 sulaketta takaisinpanotta. Millä todennäköisyydellä x sulaketta on rikki ("Sampling with and without replacement" KRE ss. 1082 – 1083)

6. Erään tehtaan osaston huolto- ja korjauskulut ovat normaalijakautuneet, $\mu = 12000$ (euroa) ja $\sigma = 2000$ euroa. (a) Millä todennäköisyydellä seuraavan kuukauden kulut ylittävät budjetoidun summan 15000 euroa.

(b) Paljonko on budjetoitava, jos siedetään 2 % :n ylitystodennäköisyys.

Loppuviikko (LV)

1. Tarkastellaan jatkuvaa satunnaismuuttujaa X, joka saa ei-negatiivisia arvoja. Määritellään tiheysfunktio(kandidaatti) $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, kun $x > 0$, 0, kun $x \leq 0$.

(a) Osoita, että tämä on tiheysfunktio.

Jakaumaa sanotaan eksponenttijakaumaksi.

(b) Johda odotusarvo ja varianssi: $\frac{1}{\alpha}$ ja $\frac{1}{\alpha^2}$

(c) Osoita, että ehdollinen todennäköisyys $P(X > x + x_0 | X > x_0) = P(X > x)$.

Huom! (c)-kohta merkitsee, että exp-jakauma "ei muista" aikaisemmin esiintynyttä tapahtumaa. Tämä on usein ominaista esim. palvelupisteeseen saapuvien peräkkäisten asiakkaiden aikavälille: Edellisen asiakkaan sapumisesta kulunut aika x_0 ei vaikuta seuraavan asiakkaan saapumiseen kuluvaan aikaan. (Sama ominaisuus on geometrisellä jakaumalla, jota luennolla tarkasteltiin tekstinkäsittelijäparan kiusaamistestissä.)

2. Laitteen elinikä on eksponentiaalisesti jakautunut. Mikä on kyseisen jakauman tiheysfunktio, jos laite kestää keskimäärin 2000 tuntia? Kuinka suurella todennäköisyydellä tällainen laite kestää yli 3000 tuntia?

Piirrä tiheysfunktio ja kertymäfunktio ja havainnollista todennäköisyyttä pinta-alapiirroksella.

3. Oletataan, että rautalevyjen valmistusprosessissa syntyvien levyjen paksuus X on normaalijakautunut, $\mu = 10$ mm ja $\sigma = 0.02$ mm. Määritä hylättävien levyjen osuus, jos hylkäyskriteeri on (a) “ohuempi kuin 9.97 mm, (b) “paksumpi kuin 10.05 mm, (c) “poikkeaa enemmän kuin 0.03 mm 10:stä.

   Havainnollista kuvin.

4. Jatketaan edellistä.

   (d) Miten tulee valita “hylkäysraja” c, jotta hylkäysprosentti olisi korkeintaan 5. (Hyväksytään väli $[\mu - c, \mu + c]$.) (e) Miten (d)-kohdan prosenttiosuus muuttuu, jos μ muuttuu arvoon 10.01 ?

   Havainnollista kuvin.

Harjoituksen lopussa Antti U. esittelee projektityötään (n. 1/2 h).

Muistakaapa se palaute, ja sitten vaan hyvää joulua ja onnellisia tulevia vuosia!