Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 10 (viikko 47 , 21 – 23.11.2001)

Koska Fourier-sarjoja käsitelyiin vain yhdellä luennolla, pidetään taas sekä ke että to neuvontaharjoituksina. Tietysti on syytä laskea jo etukäteen mahdollisimman paljon.

Kirjallisuutta: KRE ja GLJ. Notaatio GLJ:n mukaista, mutta KRE on myös oivallinen lähde.

Maple-ohjeita
`..L/fourier.mws`

1. Laske luennolla käsitelty 2-jaksoisen kanttiaallon Fourier-sarja (laskussa ei ollutkaan merkkivirhettä, vaikka sitä epäilin) suoraan kompleksimuodossa. Kyseessä on signum-funktio välillä $[-1, 1]$ jaksolliseksi laajennettuna. Kirjoita kompleksiesitys sitten reaaliseksi sincos-esitykseksi.

   Piirto tapahtuu kätevästi Maplessa operaattorin `JJ` avulla, jonka saa käyttöön näin: `read("/p/edu/mat-1.414/maple/ohjelmat.mpl"):` Kts. myös [HAM] kohta 5.10.2 ss. 127–128 ja yllä mainittu `fourier.mws`.

   Piirrä Fourier-osasummia samaan kuvaan kanttiaallon kanssa.

2. Luennolla johdettiin suoraan kompleksinen Fourier-sarjaesitys. Johda sen perusteella reaalinen, sin- ja cos-esitysmuoto.

3. Olkoon $f(t) = t,\ \ t \in (-\pi, \pi],\ \ f(t+2\pi) = f(t)$. Tee tälle samat asiat kuin 1)-tehtävässä pyydettiin kanttiaallolle. Laske nyt suoraan sincos-muoto.

   Selvitä, missä pisteissä sarja suppenee ja missä se ei suppene kohti kyseistä funktion arvoa. Mitä arvoa kohti sarja näissä "ei-pisteissä" suppenee?

   Vrt. Exa 4.1 s. 287

4. Muodosta funktion $f(t) = t^2,\ \ t \in (-\pi, \pi)$ Fourier-sarja integroimalla edellisen tehtävän sarja termeittäin.

   Johda sen avulla sarjaesitykset:

   a) $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

   b) $\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$

   Perustele sarjojen suppeneminen Fourier-sarjojen suppenemislauseen avulla. (Tämä jo keroo, että mistään turhasta lauseesta ei ole kyse, ei sarjojen summien kaavoja yleensä noin vain johdeta!)

5. Laske tehtävien 1 ja 3 sarjakehitelmien arvot puolikkaan jaksovölin keskipisteessä (mahdollisimman kaukana epäjatkuvuuspisteestä). Vertaa näiden sekä tehtävän 4 sarjojen suppenemisnopeutta. Miten mahtaa alkuperäisen jaksollisen funktion sileys ja suppenemisnopeus olla sidoksissa? Kun olet pohtinut, lue GLJ-kirjasta sivun 302 tummennettu kappale (ainakin). (GLJ-kirjoja on Henrikillä ja Antilla+kirjastoissa.)

6. Tutki *Gibbsin ilmiötä* muodostamalla vaikkapa kanttiaallon tms. Fourier-sarja ja piirtämällä sopivasti valittuja osasummia. älä täytä kuvaasi Fourier-summilla, vaan piirrä mieluummin harvoja, mutta valittuja (suuria) osasummia. Tarkkaile myös maksimipisteen siirtymistä hyppypistettä kohti. Vahvista kokeellisesti tuo väite n. 9%:n "yli/ali-ampumisesta".

7. Muodosta sekä sini- että kosinisarjat ("half range expansions") seuraaville funktioille, jotka on määritelty välillä $[0, L]$

   a) $f(x) = x^3$, c) $f(x) = sin^2 3x$ (L=π) .

   Piirrä alkup. funktioiden kuvaajat muutaman jakson alueella sekä Fourier-osasummia. (Valitse sopiva numeerinen arvo L:lle.)

8. Muodosta puoliaaltotasasuunnatun sinikäyrän $f(t) = \sin(\omega t), 0 < t < \frac{\pi}{\omega}, f(t) = 0, \frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}$ kompleksimuotoinen Fourier-sarja ja piirrä amplitudi- ja vaihekulmaspektrit. Spektrien piirtoon on hyvät välineet työarkilla `fourier.mws`. Hyödyllistä luettavaa tähän on GLJ-kirjassa 4.6.3 "Discrete frecuency spectra"ss. 338 – 342.

9. **Jaksollinen ei-sinimuotoinen heräte.** Opiskele KRE-kirjan esimerkki EXA 1 s. 551 ja suorita laskut ja piirrä kuvat Maplella. Tee periaate itsellesi (ja muille) selväksi.

   Kyseessä on Määritä tasapainotilaratkaisu ("steady state") värähtelysysteemille $mx'' + cx' + kx = r(t)$, missä $m = 1, c = 0.02, k = 25$, ja $r(t) = \begin{cases} t + \pi/2, & -\pi < t < 0, \\ -t + \pi/2, & 0 < t < -\pi \end{cases}$, $r(t + 2\pi) = r(t)$.

   Tutki lisäksi, miten vasteen amplitudit käyttäytyvät, jos jousivakio pienenee aina arvoon $k = 9$ ja toisaalta, jos jousta jäykistetään arvoon $k = 49$ saakka.

10. Ratkaise AA-tehtävä $x'' + 2x = r, \quad x(0) = x'(0) = 0$,missä $r(t)$ on 2π-jaksoinen neliöaalto:

$$r(t) = \begin{cases} -1, 0 < t < \pi \\ 1, \pi < t < 2\pi \end{cases} .$$

Suorita ratkaisu seuraavilla kahdella eri tavalla:

a) Muodosta herätefunktio vaikkapa 3:n jakson alueella ja ratkaise yhtälö Laplace-muunnoksella. Käyttele MAPLE-Laplace-taitojasi.

b) Kehitä $r(t)$ Fourier-sinisarjaksi ja käytä osasummaa S_7 (eli mukana ovat termit $\sin 7t$-termiin saakka.) oikean herätteen approksimointiin.

c) Vertaa molemmilla menetelmillä saamiasi tuloksia, esitä graafisesti ja katso, miten tarkkuus paranee, kun otat korkeamman asteisia Fourier- osasummia.

Huom: Hyödynnä tietysti ennen mainittua `PeriodicExtender` (alias JJ) -funktiota.

Fourier-kaavoja ja lauseita

T-jaksoisen funktion Fourier-sarja

Reaalimuoto Olkoon f T-jaksoinen reaalifunktio, missä $T = \frac{2\pi}{\omega}$. f:n Fourier-sarjaesitys:
$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$, missä

$$a_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos n\omega t dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\sin n\omega t dt, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Kompleksimuoto $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$, missä

$$c_n = \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)e^{-in\omega t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Suppenemislause. Olkoon f jaksollinen funktio, jaksona T. Oletetaan, että f on paloittain jatkuva ja että sillä on kaikkialla sekä vasemman että oikeanpuoliset derivaatat. Tällöin f:n Fourier-sarja suppenee kaikissa pisteissä t kohti arvoa $\frac{1}{2}(f(t-) + f(t))$. Siten kaikissa pisteissä t, joissa f on jatkuva, sarja suppenee kohti funktion arvoa $f(t)$.

Huom 1 Vasemmanpuolinen derivaatta tarkoittaa tässä yhteydessä erotusosamäärän vasemmanpuolista raja-arvoa, kun laskentapisteenä on funktion vasemmanpuolinen raja-arvo. Oikeanpuolinen vastaavasti. Niinpä esim. Heavisiden funktiolla on origossa vp. ja op. derivaatta tässä mielessä = 0. "Normaalin"puhetavan mukaan funktio olisi siten derivoituva ja erityisesti jatkuva 0:ssa, mikä viimeistään paljastaa, että puhetapamme on normaalista poikkeava.

Huom 2 Muitakin riittäviä ehtoja tunnetaan. Välttämättömiä ja riittäviä ei tunneta.