Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 1 (viikko 37–38 , 13 – 21.9.2001)

Harjoitussysteemi:

ke 12–14: AV: Liitutaulu + Matlab/Maple
to 12–14: KV: Yhdessä työskentelyä, ohjattu harjoitus.
pe 10–12: LV: Liitutaulu+tietokone (Matlab/Maple) (Hiukan enemmän tietokoneharjoitus kuin AV.)

Oppilaat saavat (maahantuojan luvalla) asentaa kurssin ajaksi omiin koneisiinsa Matlabin (5.3). Kotikoneelle kannattaa hakea ainakin
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/matlab/laode/dfield5.m`

Huomaa, että `dfield5`-funktion käyttö ei vaadi mitään muuta Matlab-taitoa kuin käynnistyksen ja polun asettamisen niin, että Matlab löytää dfield5.m:n.

Viikolla 37 emme voi pitää ylimääräistä Matlab-harjoitusta, koska salit ovat Lapio-kurssien käytössä. Opiskelkaapa siis kotona, tarkoitusta varten olen kirjoitellut tekstiä `http://www.math.hut.fi/teaching/v/matlab/opas/`. (Osa 1 alkaa olla aika valmis ja osa osasta 2). Odotan Matlab-kysmyksiä erityisesti viikon 37 aikana, teen www-sivulle koosteen Q&A (tai FAQ).)

Varaamme osan to-pe 20–21.9. harjoituksista neuvottuun Matlab (ja miksei vähän Maplekin)-harjoitteluun. (Siksi vain 4 tehtävää pe.)

Alkuviikko (AV)

1. Ratkaise differentiaaliyhtälö sijoittamalla ratkaisuehdotus (RE) annettuun yhtälöön tai esim. integroimalla, arvaamalla tms.:
   (a) $y' + y = x^2 - 2$, RE: $y = Ce^{-x} + x^2 - 2x$ (b) $y'' + y = 0$, RE: $y = a\cos x + b\sin x$ (c) $y''' = e^x$, (d) $x + yy' = 0$, RE: $x^2 + y^2 = C$ ($C > 0$, vakio).
   Vihje (d)-kohtaan: Derivoi implisiittisesti, ts. oleta, että on olemassa derivoituva funktio $x \mapsto y(x)$ s.e. $x^2 + y(x) = C$ ja derivoi puolittain. (Tässä tapauksessa olemassaolo tiedetään, onhan $y(x) = \sqrt{C - x^2}$ tällainen. Tämän eksplisiittisen lausekkeen käyttö ei silti kannata, se vain mutkistaa asioita, olkaamme siis implisiittisiä.)

2. Lisääntymiskykyinen populaatio, jonka lisääntymistä rajoittavia tekijöitä ei ole, noudattaa yleensä likimain *Malthus'n* lakia, ts. nykyhetkellä kasvunopeus on verrannollinen populaation nykykokoon.
   Muodosta ilmiölle differentiaaliyhtälömalli ja ratkaise.
   Ratkaisussa esiintyy vakiot y_0 = populaation koko alkuhetkellä ja k = "lisääntymiskykyvakio".
   Täydennämme vanhaa tuttua USA:n väkilukutaulukkoa arvoilla, jossa toinen rivi ilmaisee väkiluvun miljoonissa.

1800	1830	1860	1890	1920	1950	1980
5.3	13	31	63	106	150	230

   Ota ajan 0-hetkeksi vuosi 1800 ja määritä y_0 ja k kahden ensimmäisen sarakkeen perusteella. Miten hyvin malli vastaa todellisuutta?

3. Tätä tehtävää harjoitellaan Matlab-teknisesti loppuviikon harjoituksissa. Osattava esittää (ke 19.9.) liitutaululla käsin piirtäen periaatteessa.
   Tarkastellaan diffyhtälöä $y' = y - x$ alueessa $-1 \le x, y \le 1$,
   Piirrä xy-koordinaatistoon suuntakenttä ja isokliinejä käsin ja kokeile myös Matlabia laskimen roolissa. Ota hilaväliksi aluksi vaikka $h = 0.5$.
   Matlab-laskussa kannattaa muodostaa matriisi, sanokaamme K, jonka alkioina ovat arvot $y_i - x_j$, $i = 1 \ldots 5, j = 1 \ldots 5$ tähän tapaan:

```
h=0.5; t=-1:h:1;x=0:h:2
for i=1:5
  for j=1:5
    K(i,j)=y(i)-x(j)
  end
end
```

   Koska matriisissa rivi-indeksi i juoksee alaspäin, on helpompaa sijoittaa arvot koordinaatistoon kääntämällä matriisin sarakkeet ylösalaisin; tämä tapahtuu komennolla `flipud`.
   Katso siis matriisista `flipud(K)` arvot ja merkitse ne kynällä piirrokseen. Tarkista käsin (tai "skalaarilaskimella"(Matlabkin käy)) muutama alkio ainakin.
   (Hilan tihentäminen käy nyt helposti muuttamalla vain yllä h:ta.)

Myöhemmin opimme, että K-matriisin muodostaminen käy kätevämmin, tehokkaammin ja rutiininomaisemmin näin:

```
x=...;y=...  % Kuten edellä
[X,Y]=meshgrid(x,y);
K=Y-X;    % Jos esiintyy kertolaskua, potenssia ym.,
          % on varustettava pisteellä, siis
          %     .*, .^  ./  (taulukko-operaatiot)
```

Nyt meillä on kaikki data kerättynä suuntakentän piirtämistä varten. Voit katsoa skriptiä `...v/3/01/matlab/suuntak1.m`, joka on myös listattuna tehtäväpaperin lopussa ja miettiä, mitä siinä tapahtuu.

Lopuksi voit kokeilla LAODE-funktiota `dfield5`, jonka käyttö ei vaadi Matlabin tuntemista lainkaan.

4. Millä xy-tason käyrillä on ominaisuus: Käyrän tangentin kulmakerroin jokaisessa pisteessä (x, y) on $-\frac{4x}{y}$?

   Ratkaise yhtälö muuttujien erottelulla ("separation of variables"). Piirrä suuntakenttä isokliineja apuna käyttäen käsin vaikkapa alueessa $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

   Kun pääset tähän saakka, voit merkitä rastin.

   Kokeile myös LAODE-funktiota dfield5. Tässä on käytettävä ahkerasti stop-näppäintä, ratkaisu ajautuu aina ongelma-alueelle, mikäli x-akseli on mukana.

   Voit myös täydentää kuvaa alussa laskemillasi ratkaisukäyrillä tyyliin:

```
x=linspace(-2,2,30);y=x; [X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=... % muista pisteittäiset laskutoimitukset.
contour(x,y,Z,1:10); shg
```

   Kokeile ja selitä!

5. Säiliössä on 400 l vettä, johon on liuotettu 100 kg suolaa. Puhdasta vettä virtaa säiliöön nopeudella 2 l/min ja täysin sekoittunutta liuosta poistuu säiliöstä samalla 2 l/min nopeudella.

```
       --------|                     |
vettä 2 l/min ->                     |
       ---------                     |
               |.................. .|
               |                     |
               |    100 l            |
               |                     -------------
               |                       2 l/min ->
                ---------------------------------
```

   Kuinka paljon suolaa on jäljellä säiliössä 1 tunnin kuluttua ?

6. Mihin yhtälöön liittyy mikäkin suuntakenttä, kuvat kääntöpuolella. (`dfield5:n` ym. käyttö ankarasti kielletty!!)

Loppuviikko (LV)

1. Laskuvarjohyppääjän yhtälö. Oletetaan, että hyppääjän + varustuksen massa $= m$ ja ilmanvastus on verrannollinen nopeuden neliöön, olkoon verrannollisuuskerroin $= b$. Tällöin Newtonin 2. laki antaa liikeyhtälön:

$$mv' = mg - bv^2.$$

   Olkoon yksinkertaisuuden vuoksi $m = 1, b = 1$ ja $g = 9.81 m/s^2$.

   Piirrä suuntakenttä.

   Oletetaan, että laskuvarjo aukeaa, kun $v = 10 m/s$, valitaan tämä alkuhetkeksi $t = 0$. Piirrä tämä ratkaisukäyrä suuntakenttäpiirrokseen. Yritä nähdä suuntakentästä, että kaikki ratkaisut näyttävät lähestyvän rajanopeutta $v \approx 3.13$ ja että ratkaisut ovat joko kasvavia tai pieneneviä (ja millä alkuarvoilla mitäkin, ja mitä tarkoittaa fysikaalisesti)

   Määritä rajanopeus suoraan yhtälöstä.

   Käytä piirroksiin LAODE-funktiota `dfield5`

2. Muodosta edellä olevan laskuvarjotehtävän analyyttinen ratkaisu muuttujien erottelulla. Määritä edellä mainittu $(v(0) = 10)$-ratkaisukäyrä. Tarkista ratkaisu Maplella ja kokeile lopuksi Maplen `dsolve`- komentoa. (Ohje [HAM]-kirjassa.)

Ohje analyyttiseen: Muistathan, että osamurtohajoitelma on hyödyllinen rationaalilausekkeen integroinnissa (Maple: `convert(lauseke,parfrac,muuttuja);` mutta osattava myös käsin).

3. Vaihdamme tässä LAODE-tyyliseen notaatioon: t on riippumaton muuttuja, x on "riippuva" muuttuja. Kannattaa totutella eri tyyleihin.

   Ratkaise alkuarvotehtävä $x' = \frac{x}{2} - e^{-t}$, $x(0) = -1$. Kyseessä on *lineaarinen epähomogeeninen* (EHY). Tämä lasku ei edellytä mitään uutta muuttujien erottelun lisäksi (ainoastaan uskomista), kaikki on tässä neuvottu.

   Suorita ratkaisu näin:

   - Ratkaise ensin vastaava (HY) $x' = \frac{x}{2}$ (yleinen ratkaisu).
   - Yritä keksiä jokin (EHY):n erityisratkaisu (siis mikä tahansa (EHY):n toteuttava). Keksiminen on helppoa, kun mietit exp-funktion derivointia. (Määräämätön kerroin ratkaistaan sijoittamalla yrite (EHY):yyn).

   Lineaaristen teoria sanoo, että (EHY):n yleinen = (HY):n yleinen + (EHY):n erikoinen.

   Piirrä myös suuntakenttä ja ratkaisukäyriä (joko `dfield5 tai suuntak`). Miten näet suuntakentästä, että yhtälö ei ole autonominen?

4. Ratkaise edellinen tehtävä integroivan tekijän menettelyllä.

Matlab-avustusta

Kaikki Matlab-tiedostot sijoitetaan sekä kurssin www-matlab-hakemistoon `../matlab` että hakemistoon `/p/edu/mat-1.414/matlab/`. Jälkimmäiset saadaan Matlab-istunnossa käyttöön antamalla Matlab-komento `addpath /p/edu/mat-1.414/matlab/`. Tämä kannattaa sijoittaa omaan `$home/matlab/startup.m` - tiedostoon.

```
% Matlab-skripti: ..v/3/01/matlab/suuntak1.m
% Kts. myös exasuuntak.m
% HA 4.9.2001
%
% Aihe: Diffyhtälön  y'=f(x,y)  suuntakenttä ja isokliinit.
%
% Havainnollinen versio, jossa jananpätkät piirretään for-
% silmukassa. Oikeaoppisempi tehoversio: suuntak.m
%
clf
f=inline('y-x','x','y')     % f(x,y)=y-x
%f=inline('x.*y','x','y')   % Toinen esimerkki: f(x,y)=xy

h=0.5;a=-1;b=1;c=0;d=2;   % Muuta tarpeen mukaan
x=a:h:b;y=c:h:d;

[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=f(X,Y);

 flipud(Z)   % havainnollistukseen, tosi käytössä kommentti.

 plot(X(:),Y(:),'x')   % Jos haluat merkitä ristillä pisteet, joissa
                        % derivaatta-arvot on laskettu, poista kommentti
hold on
xx=X(:); yy=Y(:); n=length(xx);
for i=1:n
   v=[1,f(xx(i),yy(i))];v=0.5*h*v/norm(v);
   alkup=[xx(i),yy(i)]-v;loppup=[xx(i),yy(i)]+v;
   plot([alkup(1),loppup(1)],[alkup(2),loppup(2)])
end;

% Jos haluat vain suuntakentän, lopeta tähän.
%
% Piirretään edellä olevia korkeusarvoja vastaavat isokliinit.

x=linspace(a,b,30);y=linspace(c,d,30);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
ZZ=f(X,Y);
 contour(x,y,ZZ,Z(:))  % Korkeusvektoriksi valitaan Z(:), tällöin
axis equal             %  saadaan kaikki suuntakenttäpiirroksen arvot,
axis([a,b,c,d])        %    ovelaa!
grid
title('y''=f(x,y)')     % Jos haluat oikean otsikon, editoi tähän
shg
```