Teknillinen korkeakoulu | Apiola
Matematiikka

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2000
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 7 (viikko 44 , 31.10 –2.11)

Alkuviikko

1. Ratkaise AA-tehtävä $x'' + x' + x = g(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, missä
$$g(t) = \begin{cases} t, 0 \le t < 1 \\ 2 - t, 1 < t < 2 \\ 0, t > 2 \end{cases}$$
2. Jaksollinen funktio f, jakso= 4, määritellään välillä $[0, 4)$ näin:
$f(t) = \begin{cases} 3t, 0 \le t < 2 \\ 6, 2 \le t < 4 \end{cases}$. Piirrä kuvaaja välillä $[0, 12)$ ja määritä f:n Laplace-muunnos.
3. Määritä käänteismuunnos, kun
a) $F(s) = \frac{2s^2+1}{(s+2)(s+3)}$ b) $F(s) = \frac{s^2+2}{s^2+2s+5}$
4. Määritä seuraavien funktioiden yleistetty derivaatta:
a) $f(t) = \begin{cases} 3t^2, 0 \le t < 4 \\ 2t - 3, 4 \le t < 6 \\ t, t \ge 6 \end{cases}$ b) $g(t) = \begin{cases} t, 0 \le t < 1 \\ 2 - t, 1 \le t < 2 \\ 0, t > 2 \end{cases}$
5. Sarjaan kytketyssä RLC- piirissä on vastus $R = 100\Omega$, kondensaattori $C = 10^{-4}F$ ja induktanssi (kela) $L = 2H$. Alkutilassa kondensaattorin varaus ja virta ovat nollilla. Hetkellä $t = 0$ piiriin synnytetään impulsiivinen jännitepiikki $E\delta(t)$. Määritä kondensaattorin varaus $q(t)$ ja virta $i(t)$.
6. Ratkaise vaimennettu värähtelytehtävä:
$$x'' + 2x' + x = \delta(t) - H(t - 2\pi), x(0) = 0, x'(0) = 0.$$
Tässä herätteenä (ulkoisena voimana) on impulssi (vasaranisku) hetkellä $t = 0$ ja vakiovoima -1 ajanhetkestä $t = 2\pi$ alkaen. Piirrä ratkaisufunktio vaikkapa välillä $[0, 25]$.
Sama tehtävä on myös LV-tehtävänä (Maple), siinä yhteydessä sitten niitä kuvia.

Loppuviikko

1. AV-tehtävä 6 Maple-avusteisesti havainnollisine kuvineen.

Kuva 1:

2. Johda diffyhtälösysteemi oheisen kuvan massa-jousisysteemille. Voit olettaa: $x_1 > x_2 > x_3$.
Ratkaise tehtävä Laplace-muunnostekniikalla tietenkin.
Massat ja jousivakio(t): $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 2, k = 1$
Alkuehdot:$x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, x_3(0) = 3, x_1'(0) = x_2'(0) = x_3'(0) = 0.$
Ulkoinen voima (heräte): $f(t) = \cos \omega t$, olkoon $\omega = 1$.
Vihje: Tätä ei tarvitse kirjoittaa 1. kl. 6×6-systeemiksi vaan voidaan hyvin käsitellä 2. kl. 3×3-systeeminä. Kirjoita kukin yhtälö erikseen tyyliin
```
> dyht1:=diff(y1(t),t,t)=...);dyht2:=...;dyht3:=...;
```
L-muunna ja ratkaise.
Huom: Nimittäjään saat korkea-asteisen polynomin. Siihen kannattaa kokeilla `factor-` komentoa. Se ei auta pitkälle, suorita sitten `solve(denom(...)=0,s);` Nimittäjän tekijöihinjako ei onnistu kokonaislukukunnassa, mutta sopivassa laajennetussa lukujoukossa kylläkin. Komento `convert(laus,parfrac,s,sqrt(41));` sisältää neljännen argumentin, joksi kannattaa valita sopiva juurilauseke, ehkä tuo yllä oleva toimii. (Se näkyy `solve`-komennon tuloksesta.) Kts. tarkemmin HAM s. 42
3. **Projekti 1-2:lle, pisteitä 1-3** Lähde: [Laode] ss. 586 – 590.
(a) Tutustu Laode-kirjan "Grand Finale"-esimerkkiin $x'' + 4x' + 5x = \delta_1(t) + 2H_3(t)$, $x(0) = 0, x'(0) = 1$.
(Tässä merkitään H_c:llä GLJ:n $H(t-c)$:tä ja vastaavasti δ_c:llä $\delta(t-c)$:tä.) Selvitä samassa yhteydessä myös, miten osamurtohajoitelmat voidaan tehdä Matlabilla. (funktio realform täytyy kirjoittaa (=kopioida kirjasta) itse, se ei sisälly Laode- kokoelmaan.) Suorita toisaalta tämä esimerkki Maplella. Kerro, mitä ratkaisukuvasta näkyy.

(b) Exe. 3. ss. 589 – 590 Ratkaise sama tehtävä Matlabin `ode45`-funktiolla. Tässä täytyy kirjoittaa 2. kertaluvun yhtälö 1. kertaluvun systeemiksi. Erityisen kiintoisa kohta on *Diracin* δ:n numeerinen approksimointi. Kokeile siihen tyylin kuin ehdotetaan Laode:n s. 590 (mutta voit muutella myös siellä olevaa h-parametria.) Tee pieni tutkielma siitä, miten h-parametrin ja toleranssin valinta vaikuttaa tulokseen vertailtaessa analyyttisen ratkaisun kanssa.

4. Toinen projekti 1-2:lle (1-3 p.) Säikyttelin luennolla, että jaksolliset saattavat olla vaikeita Laplace- muunnoksella. Tässä on hyvä tilaisuus opiskella ja kokeilla, missä vaikeus voi piillä, ja miten se voidaan voittaa (ainakin tietyissä tapauksissa). Opiskele Laode-kirjasta ss. 593 – 595 *Piecewise smooth perodic forcing.* Selvitä vaiheet, ja suorita laskut myös Maplella.

   Toinen idea: Ratkaisua voidaan lähestyä myös tähän tapaan: Otetaan jaksollisesta herätefunktiosta aikasiivuja, vaikka yhden jakson, kahden jakson jne. pituisia ja ratkaistaan vastaavat AA-tehtävät Maplea hyödyntäen. Katsotaan ainakin kuvista, miten saadut ratkaisuapproksimaatiot esittävät edellä saatua koko tehtävän ratkaisua. (Arvatenkin approksimaation laatu huononee, kun lasketaan/piirretään ratkaisua pitemmälle kuin approksimoiva siivu herätteestä.)

   Jos energiaa vielä on, voit kokeilla samaa tekniikkaa johonkin muuhunkin jaksolliseen.

   Maple-työkalu jaksollisten funktioiden käsittelyyn

   Kts. myös HAM ss. 127–128

   Jos suoritat Maplessa komennon

   `read("/p/edu/mat-1.414/maple/ohjelmat.mpl"):`

   saat käyttöösi funktion:

```
# Jaksollinen jatko: MapleTech Vol 3 No. 3 1996
#
JJ:=proc(f,d::range)
  subs({'F'=f,'L'=lhs(d),'D'=rhs(d)-lhs(d)},
  proc(x::algebraic) local y;
    y:=floor((x-L)/D);
    F(x-y*D);
  end)
end:
# Esim:
#sw:=JJ(signum,-1..1);
#plot(sw,-4..4);
```

   Tälle tulee vielä paljon käyttöä Fourier-sarjojen yhteydessä. (Voit tuon read:n sijoittaa `.mapleinit`:iin)

5. Funktioiden f ja g konvoluutio määritellään kaavalla

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

   Määritä konvoluutiolauseen $L(f*g) = (Lf)(Lg)$ avulla seuraavien funktioiden Laplace-käänteismuunnokset:

   a) $\frac{1}{(s-a)^2}$ **b)** $\frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$ **c)** $\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$

Eiköhän tässä taas huvia ja hyötyä ole ensi torstaihin saakka, ihan mukavan tuntuisia tehtäviä generoitui, vaikka sen itse sanonkin!