Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Apiola

Mat-1.415 Matematiikan peruskurssi V3 syksy 2000
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 6 (viikko 43 , 24–26.10)

Alkuviikko

1. Laske määritelmän perusteella seuraavien funktioiden Laplace-muunnokset:

   a) $f(t) = t^2$, b) $f(t) = te^{-t}$,

   Millä osassa s-tasoa ovat voimassa?

2. Sama kuin edellä näihin nähden:

   c) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [1,2] \\ 0, & t \notin [1,2] \end{cases}$ d) $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1] \\ 0, & t > 1 \end{cases}$

3. Laske seuraavien funktioiden $F(s)$ Laplace-käänteismuunnokset

   a) $\frac{s+5}{(s+1)(s-3)}$ b) $\frac{2s+6}{s^2+4}$ c) $\frac{s+8}{s^2+4s+5}$

4. Hyödynnä derivaatan (tarvittaessa korkeampienkin) Laplace-muunnosta seuraavissa L-muunnostehtävissä:

   a) $t\cos t$, **b)** te^{-5t}, **c)** $\cosh^2 t$

5. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla (AA)-tehtävä: $x' + 3x = e^{-2t}$, $x(0) = 2$.

6. Ratkaise Laplace-muunnoksen avulla (AA)-tehtävä: $x'' + 2x' + 5x = 1$, $x(0) = 0, x'(0) = 0$.

Loppuviikko

1. Laske alla olevan Laplacemuunnostaulukon muunnokset ja käänteismuunnokset läpi. Joudutko tekemään joitakin `assume`-oletuksia? Suorita tehtävä niin, että lasket joitakin (ainakin alusta aloittaen) suoraan määritelmän perusteella ja loput laplace-funktiolla. (Käänteismuunnokseen ei ole helppoa kaavaa, joten se vain invlaplace:lla).

   Huomaa, että muuttujien järjestys on hyvin olennainen.

2. Ratkaise alkuarvotehtävä $y'' + 4y' + 13y = 20e^{-t}$, $y(0) = 1, y'(0) = 3$ Laplace-muunnoksen avulla.

   Vast: $y(t) = 2e^{-t} + e^{-2t}\sin 3t - e^{-2t}\cos 3t$

   Suorita ratkaisusi käsin käyttäen vain minimaalisesti Maplea (esim. osamurtoihin yms.). Tee sitten Maplella käsinlaskua simuloiden, kuten HAM-kirjassa on neuvottu. Lopuksi antamalla Maplelle enemmän vastuuta (HAM-tyyli on taas sopiva ohjenuora).

3. Oheisen virtapiirin komponenteilla ja syöttöjännitteellä on arvot: $C = 50\mu F$, $L = 2H$, $R = 100\Omega$, $e(t) = 50\sin 100t$ (V). Kytkin suljetaan hetkellä $t = 0$, jolloin siis $i_1(0) = 0, i_2(0) = 0$. Laske Laplace-muunnokset $I_1(s)$ ja $I_2(s)$ ja käänteismuuntamalla virrat $i_1(t)$ ja $i_2(t)$. Piirrä virtojen kuvaajat ja selvitä, miten ne käyttäytyvät suurilla t:n arvoilla.

```
       /    C i1(t) i2(t)
    --/ ----||-->------->-------
    |  K          |            |
    |             S            <
    o             S            >
e(t)              S  L         <  R
    o             S            >
    |             S            <
    |             |            |
    ----------------------------
```

4. Lausu kuvan 1 kuvien esittämät funktiot Heavisiden funktioiden H yhdistelminä ja tarkista tulokset piirtämällä.

   Suorita myös `convert(lauseke,piecewise);` ja kokeile myös käänteistä: `convert(palalauseke,Heaviside);` (`piecewise`, kts. HAM s. 63 tai `?piecewise`)

   Mieti lopuksi Matlab-lauseke, jolla saat määritellyksi Heavisiden funktion. (Kolme ASCII-merkkiä riittää, jos muuttujasi on yhden merkin mittainen)

5. Ratkaise alkuarvotehtävä $x'' + 2x' = H(t-1)$, $x(0) = 0, x'(0) = 1$.

   Tässä H on *Heavisiden funktio*, jota usein merkitään myös u:lla.

   $u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$

   Vast: $x(t) = -1/2\,e^{-2\,t} + 1/2 + u(t-1)\left(1/2\,t - 3/4 + 1/4\,e^{-2\,t+2}\right)$

   Tämä tehtävä on vähän liiankin tarkkaan neuvottu HAM-kirjassa, mutta siitähän on helppo ottaa opiksi (ja saada halpoja laskaripisteitä).

   Tee tosiaan vaiheittain ja kiinnitä erityistä huomiota siirtolauseiden ("s-shift. t-shift") käyttöön.

   Varusta asiaa ja sen ymmärtämistä valaisevin kommentein.

6. Ratkaise AA-tehtävä

$$y''(t) + 3y'(t) + y(t) = g(t), \quad y(0) = 1, y'(0) = 1,$$

Kuva 1:

missä

$$g(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1, 0 \leq t < 1, \\ -1, 1 \leq t < 2, \\ 0, t \geq 2, \end{cases}$$

Ohje: Kirjoita g-funktio ensin Heavisiden funktioiden avulla. Diffyhtälön ratkaisu voi olla monimutkaisehko, mutta älä välitä. Piirrä samaan kuvaan “heräte” ja “vaste”, vaikkapa tyylikkäästi teksteillä varustettuna, kuten [HAM] s. 187, kuva 10.1. Voit kokeilla lopuksi myös “black-box”-tyyliä:

```
AE:=y(0)=1,D(y)(0)=1: ratk:=dsolve({dyht,AE},y(t),method=laplace);
```

Laplace-muunnokset

Tämä taulukko ja kaavat (+ joitakin lisäkaavoja) on kokeissa käytettävissä.

Määritelmä: Annettu $f(t)$, $\mathcal{L}f = F$, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Merk.** $u(t) = H(t)$=yksikköaskelfunktio .
$(\mathcal{L}f')(s) = sF(s) - f(0)$, $(\mathcal{L}f'')(s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$,

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	f
t^k	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	sin

Laplace-muunnokset Maple:ssa

Tässä on HAM-kirjassa omaksuttu suositus:

`> with(inttrans):alias(L=laplace,IL=invlaplace,u=Heaviside):` Sen jälkeen voidaan komentaa tyyliin `> L(sin(t),t,s);IL(%,s,t);plot(u(t)-u(t-1),t=-1..1);`

Osamurtokehitelmät

Rationaalifunktioita käänteismuunnettaessa tarvitaan usein osamurtokehitelmiä.

Olk. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, missä $deg(P) < deg(Q)$ ja yhteiset tekijät on supistettu.

1) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s - a$ (tarkoittaa, että tekijä ei esiinny korkeammassa potenssissa), otetaan kehitelmään termi

$$\frac{A}{x - a}.$$

2) Jos $Q(s)$:llä on yksinkertainen tekijä $s^2 + bx + c$, tulee kehitelmään termi

$$\frac{Bx + C}{x^2 + bx + c}$$

3) Jos em. muotoa olevat termit esiintyvät korkeammassa potenssissa, sanokaamme r, otetaan termit

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x - a)^r}$$

ja vastaavasti toisessa tapauksessa.

Osamurrot Maple:ssa ja Matlab:ssa `convert(lauseke,parfrac,muuttuja)`

```
> 1/((s+1)*(s-1));convert(%,parfrac,s);
```

MATLAB: `help residue`