Laskuharjoitus 1.

Alkuviikon mallivastaukset

1. a)
Lasketaan kompleksiluvun reaali- ja imaginääriosa. Murtolukumuodossa oleva kompleksiluku on ensin muutettava sopivampaan muotoon laventamalla puolittain nimittäjän liittoluvulla.

$$z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-i-i-1}{1+i-i+1} = -i$$

$$\Re z = 0, \Im z = -1$$

Pituus eli itseisarvo:

$$|-i| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$$

Argumentti:

$$\arg(-i) = \frac{\pi}{2}$$

b)

$$z = \left(\frac{1+2i}{1-i}\right)^2$$

$$\frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3i-1}{2}$$

$$z = \left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)^2 = -2-\frac{3}{2}i$$

$$\Re z = -2, \Im z = -\frac{3}{2}$$

$$|-2-\frac{3}{2}i| = \sqrt{2^2+(\frac{3}{2})^2} = \frac{5}{2}$$

$$\arg(-2-\frac{3}{2}i) = \arctan(\frac{3}{4}) - \pi$$

(Tässä pelkkä arctan tarkoittaa päähaaraa.)

2.
Kompleksiluvun n:s juuri lasketaan kaavalla

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), k = 0,1,...,n-1$$

missä r=kompleksiluvun itseisarvo ja θ=kompleksiluvun argumentin arvo. Nyt lasketaan $\sqrt[n]{1+i}$ tapauksessa n=3:

$$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi+8k\pi}{12} + i\sin\frac{\pi+8k\pi}{12}\right)$$

$$= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{k\pi}{12} + i\sin\frac{k\pi}{12}\right), k = 1,9,17$$

Tapaus n=4:

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi+8k\pi}{16} + i\sin\frac{\pi+8k\pi}{16}\right)$$

$$= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{k\pi}{16} + i\sin\frac{k\pi}{16}\right), k = 1,9,17,25$$

3.
Lasketaan kosinin ja sinin moninkertaisten kulmien kaavat käyttämällä [1] kaavaa

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

(Tämähän seuraa välittömästi kompleksikertolaskun määritelmästä ja sin/cos yhteenlaskukaavoista, kun siirrytään napakoordinaattiesitykseen)

Lasketaan tapaus $n = 2$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

[1] Abraham de Moivre (1667-1754)

$$\cos^2\theta + i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

Yhdistämällä reaaliset ja imaginääriset osat saadaan

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$$

Tapaus $n = 3$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$\cos^3\theta + i3\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - \sin^3\theta = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

Tapaus $n = 4$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos^4\theta + i4\cos^3\theta\sin\theta - 6cos^2\theta\sin^2\theta - i4\cos\theta\sin^3\theta + \sin^4\theta$$

$$= \cos 4\theta + i\sin 4\theta$$

$$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$$

$$\sin 4\theta = 4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta$$

Tapaus $n = 5$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5$$

$$= \cos^5\theta + i5\cos^4\theta\sin\theta - 10cos^3\theta\sin^2\theta - i10\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta$$

$$= \cos 5\theta + i\sin 5\theta$$

Nyt saadaan sekä kosinille, että sinille viisinkertaisen kulman kaavat.

$$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$

$$\sin 5\theta = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$$

4. a)

$$z^2 - (5+i)z + 8 + i = 0$$

$$z = \frac{5+i \pm \sqrt{(5+i)^2 - 4\cdot 1\cdot(8+i)}}{2} = \frac{5+i\pm\sqrt{-8+6o}}{2}$$

$$z = 3+2i \vee z = 2-i$$

Neliöjuuren laskentaan voi käyttää n:nnen juuren kaavaa tapauksessa n=2. (Kompleksisessa tapauksessa ei ole selkeäasti määriteltyä "positiivista neliöjuurta". Joka tapauksessa nytkin neliöjuuria on 2 kpl ja ne ovat toistensa vastalukuja.

b)
Osoitettava, että reaalikertoimisen polynomin kompleksiset nollakohdat ovat pareittain toistensa liittolukuja.
Olk. $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$.
Tällöin

$$P_n(z_0) = 0 \Leftrightarrow p_n(\bar{z}_0) = 0$$

. Tod.

$$p_n(z_0) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k = 0 \Leftrightarrow a_0 z^0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \bar{z}^k = \bar{0} \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = 0 \Leftrightarrow p_n(\bar{z}_0) = 0$$

Tässä käytimme hyväksi tietoa $0 = \bar{0}$.

5. Todistettava kolmioepäyhtälö kompleksiluvuilla:

$$(|z_1 + z_2|) \leq |z_1| + |z_2|$$

Tod.

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(z_1 \bar{+} z_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

Tässä käytimme hyväksi tietoa $|\bar{z}| = |z|$ ja $z \leq |z|$ ja ennen kaikkea sitä, että summan ja tulon liittoluvut ovat yhteenlaskettavien/tekijoiden liittolukujen summia/tuloja. (Se tärkein vaihe ei oikein näy, enkä ehdi editoida ...)

6. a)

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$
\begin{aligned}
\omega^2 &= \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2 \\
&= \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}
\end{aligned}
$$

$$
\omega^m = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^m = \cos\frac{2m\pi}{n} + i\sin\frac{2m\pi}{n}
$$

Tässä käytettiin apuna de Moivren kaavaa. Koska juuren esitysmuoto voitiin saavuttaa jokaisella kokonaisuluvulla $k = 0.\ldots.n-1$ ovat nämä ykkösen juuria.

b)

$$
\begin{aligned}
1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} \\
&= \frac{1 - \cos\frac{2n\pi}{n} + i\sin\frac{2n\pi}{n}}{1 - \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}} \\
&= \frac{1 - 1 + 0}{1 - \cos 2\pi n + i\sin\frac{2\pi}{n}} = 0
\end{aligned}
$$