Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Apiola/Pajukangas

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 9 (viikko 13–14 , 27.3 ,4–5.4.2002)

Ke-harj. ennen pääsiäistä, to ja pe jälkeen.

Ohjetiedostoja, työarkkkeja, linkkejä:

harj9ohje.mws (ehkä H9.html) ja lopussa olevat ohjeet sekä nämä:

```
http://www.math.hut.fi/teaching/v/2/02/L/LSQ.html (.mws)
http://www.math.hut.fi/teaching/v/2/02/L/SD.html/ (.mws)
http://www.math.hut.fi/teaching/v/2/02/L/newtopt.html (.mws)
```

Alkuviikko (AV)

1. Sovita PNS-suora dataan `[[2,5],[3,9],[4,15],[5,2]]` . Kirjoita normaaliyhtälöt muotoon $C^T Ca = C^T y$ ja ratkaise. (Jaksat varmasti ratkaista käsin 2×2-yhtälösysteemin).

   Piirrä datapisteet ja suora.

   Tämä on siis puhdas käsinlasku,

2. Suorita yksi askel Newtonin menetelmää harj.8 AV funktion $f(\mathbf{x}) = 2(x_1^2 + x_2^2) + x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2)$ minimoimiseksi.

   Alkupisteeksi voit valita saman $\mathbf{p_0} = [1 - 2]^T$ tai minkä tahansa. Minimin pitäisi löytyä yhdellä askeleella. Miksi?

3. Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x^2 - xy + 2y^2 = 10 \\ x^3 y^2 = 2 \end{cases}$$

   Kirjoita Newtonin menetelmän askel tälle systeemille. (Huom! Lineaarisen yhtälösysteemin ratkaisua ei kannata kirjoittaa symboliseen muotoon, vaikka se 2×2-tapauksessa olisikin yksinkertaisen Jakobiaanin tilanteessa mahdollista.)

   Hahmottele käyrät ja lähde jotain leikkauspistettä lähellä olevasta iteroimaan Newtonilla. Yksi askel käsin laskettuna riittää.

   Saat mielellään jatkaa Maplella (mutta ei ole pakko).

4. Tasossa liikkuvan 2-osaisen robotin käsivarren OAB piste O on kiinnitetty origoon. Pisteessä A on nivel, jolla varren osat OA ja AB on kiinnitetty toisiinsa. Varren OA ja x-akselin välinen kulma olkoon α ja varren OA ja AB välinen kulma olkoon β.

   Olkoot varsien pituudet d_1 ja d_2. Lausu pisteen B koordinaatit ohjauskulmien α ja β avulla.

   Robottia ohjattaessa halutaan annettua pistettä vastaavat ohjauskulmien arvot, ts. edellä lasketun funktion käänteisfunktion arvot.

   Kirjoita Newtonin menetelmän askel tehtävän ratkaisemiseksi. Siis lähtöpisteenä jokin robotin käden ”ulottumisalueeseen”kuuluva piste. (Jatkoa LV)

Tehtävät ovat loppuviikkopainotteisia, erityisesti, koska käsinlasku ei juuri ole mielekästä. Käytetään ke harjoituksen loppuaika LV-tehtävien aloitteluun ohjatusti.

Loppuviikko (LV)

1. Joulukuun 1–28 päivänä 1981 aurinko laski *Lund*:ssa klo 15.30:n ja 15.45:n välillä seuraavan taulukon mukaisesti, missä x tarkoittaa päivää ($1 \leq x \leq 28$) ja y minuuttimäärää klo 15.30:n jälkeen, jolloin aurinko laski.

x	y	x	y
1	8	19-21	3
2	7	22-23	4
3	6	24	5
4-5	5	25	6
6-7	4	26-27	7
8-9	3	28	7
10-18	2		

   Data voidaan esittää varsin hyvin 2. asteen polynomilla. Määritä kertoimet a_0, a_1, a_2, piirrä data ja polynomi. Minä päivänä auringonlaskuaika saavuttaa miniminsä mallin mukaan. (Kirjasta *Fröberg*: Numerical Analysis 1985)

2. Sovita eriasteisia PNS-polynomeja USA:n väestölaskenta- (Census)-dataan. (Luvut tietysti "megahenkilöä")

Vuosi	1940	1950	1960	1970	1980	1990
Väki	132.165	151.326	179.323	203.302	226.542	249.633

Piirrä datapisteet ja PNS-polynomit. Mikä näyttää järkevimmältä ja mikä vähiten järkevältä mallilta?

Mikä polynomi antaa parhaan arvon vuodelle 2000 ? (kts. `http://www.census.gov/main/www/cen2000.html`)

(Huomaa, että normaaliyhtälöratkaisulla on taipumusta häiriöalttiuteen, voit joutua lisäämään laskentatarkkuutta. Parempi tapa olisi skaalata data.)

3. Tutki harj8lv tehtävän 5 funktion $f(x,y) = e^x(4x^2 + 2y^2 + 4xy + 2y + 1)$ ääriarvoja.

(Vaihteluksi voit yhtä hyvin ottaa vaikkapa funktion $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^4 - 16x^2 + 5x + y^4 - 16y^2 + 5y)$)

Nyt aiheena on erityisesti Newtonin menetelmä. Vertaa Newton- ja SD-menetelmien reittejä ja tee myös taulukot, joista näkyy reittipisteet ja funktion arvo niissä. (Vrt. `harj9ohje.mws/html`)

Voit vertailun vuoksi testata myös `NonlinearProgramming`-funktioita.

4. Palataan AV yhtälöryhmään (mutta muutettiin kuitenkin)

$$\begin{cases} 1 + x^2 - y^2 + e^x \cos y = 0 \\ 2xy + e^x \sin y = 0 \end{cases}$$

Piirrä kuvaajat `implicitplot`:lla ja etsi siitä sopivat lähtöarvot.

Suorita Maplen avulla Newtonin iteraatioita ainakin jostakin lähtöarvosta.

Tee taulukko, jossa on sarakkeina: iteraatiokierros, reittipiste, funktion arvo siinä.

Piirrä reitin kuva. (kts. harj9ohje.mws)

Kokeile lopuksi Maplen `fsolve`-komentoa.

5. Jatkoa robottitehtävään.

Olkoon $d_1 = 6$ ja $d_2 = 5$. Määritä Newtonin menetelmällä ohjauskulmat, joilla päästään pisteeseen $(10, 4)$, kun alkuarvoiksi otetaan $\alpha = 0.7$ $\beta = 0.7$ Onko ratkaisu 1-käsitteinen.

Mitä tapahtuu, jos joudutaan pisteeseen, jossa Jakobin determinantti = 0 ?

"Vapaaehtoinen" lisäpiirre: Tee Newtonin iteraatiosta animaatio, joka näyttää käsivarren asennon kullakin iteraatioaskeleella. Samantien voit vaihdella kohdepistettä ja alkuarvoja.

Ohjeita

Newton ja Newton

Newton optimointiin

Etsitään funktion f minimiä $\mathbb{R}^n$:ssä:
Alkupiste x_0.
Määrätään h ehdosta $H_f(x_0)h = -\nabla f(x_0)$
Päivitys: $x_1 = x_0 + h$
Sitten iteroidaan.

Huom! Toimintavarmuus on olennaisesti parempi, jos $H_f(x_n)$ on positiividefiniitti "nykypisteessä" x_n.

Newton yhtälösysteemiin

Vektoriarvoinen funktio $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Etsitään 0-kohtaa, ts. vektoria x, joka toteuttaa $n \times n$-yhtälösysteemin $f(x) = 0$.
Alkupiste x_0.
Määrätään h ehdosta $J_f(x_0)h = -f(x_0)$
Päivitys: $x_1 = x_0 + h$
Sitten iteroidaan.

Huom: $J_f(x_0)$ tarkoittaa f:n Jacobin matriisia $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j}$, missä f_i on f:n i:s komponenttifunktio (ei mitään tekemistä osittaisderivaatan kanssa).

Huom! Jos Jakobiaani tulkitaan derivaataksi ja kirjoitetaan kaava käänteismatriisin avulla, saadaan täsmällinen analogia yhden muuttujan Newtoniin.

0.0.1 Maple-kirjasto optimointiin

```
libname:= /p/edu/mat-1.414/maple/,libname; (kannattaa sijoittaa
                                            .mapleinit-tiedostoon.)
Sitten
with(linalg): with(LinearAlgebra): with(NonlinearProgramming);
```

Kts myös:
`http://www.mapleapps.com/powertools/optimization/html/nlpdemo.html`