Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Apiola

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 6 (viikko 10 , 6 — 8.3.2002)

Alkuviikko (AV)

1. Laske matriisien A ja B ominaisarvot sekä B:n ominaisvektorit, kun
   $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$
   Voidaanko matriisien ominaisvektoreista muodostaa avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta? (A-matriisin tapauksessa ei todellakaan tarvitse tätä johtopäätöstä varten laskea ominaisvektoreita.)

2. Matriisilla $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ kertominen kiertää tason vektoreita kulmalla θ. Mieti ensin geometriselta kannalta, voiko tällä olla reaalisia ominaisarvoja jollain/millään θ:lla.

   Laske sitten ominaisarvot ja -vektorit.

   Vaikka pääpaino tässä ominaisarvotietoiskussa onkin reaalisessa teoriassa, on syytä laskea ainakin yksi kompleksilukuihin johtava tehtävä.

   Vastaus laskutehtävään: Ominaisarvot: $\cos(\theta) + i\sin(\theta), \cos(\theta) - i\sin(\theta)$
   Ominaisvektorit: $[1, -i], [1, i]$

3. Muodosta matriisin $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ominaisvektoreista $\mathbb{R}^2$:n kanta ja diagonalisoi matriisi. Katso myös lopussa olevia ohjeita. Huomaa, että ominaisarvo saa olla 0, se ei edes estä diagonalisointia.

4. Osoita, että vanha kunnon *Fibonaccin* jono (F_n) saadaan matriisin
   $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ potensseja muodostamalla.

   Diagonalisoi matriisi A, ja laske sen avulla kaava F_n:lle.

   Eikä sitten enempää tällä kertaa!

Loppuviikko (LV)

1. Määritä pinnan $z = \arctan\frac{y}{x}$ tangenttitason yhtälö pisteessä $(2, 2, \pi/4)$.

   Piirrä kuva. (Kts. `..H/harj6ohje.mws`)

2. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$

   Varmista, että näet päältäpäin, että ominaisvektoreista voidaan muodostaa $\mathbb{R}^3$:n ortonormaali kanta.

   Laske ominaisarvot ja -vektorit Maplella käsinlaskutyyliä simuloiden (kts. L/ominaisarvot.mws), saat laskea käsinkin. Tarkista komennolla `Eigenvectors`.

3. Muodosta edellisen tehtävän matriisin A ominaisvektoreista ortonormeerattu kanta $\mathbb{R}^3$:lle. Eli muodosta matriisi X, jonka sarakkeina ovat normeeratut ominaisvektorit.

   Tarkista ortonormaalisuus kertomalla $X^T X$.

   Tarkista, että diagonalisointi meni oikein kertomalla $X^T AX$.

   Huom: Vektorin v euklidinen normi Maplella: `norm(v,2);` (Kts. myös `..L/ominaisarvot.mws`)

4. Määritä seuraavien neliömuotojen matriisit sekä definiittisyys:

   (a) $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2$ (b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
   (c) $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 2x_4^2 - 4x_2x_3$

   Esitä neliömuodot pääakselikoordinaateissa. Ei ole pahitteeksi, vaikka piirrät joitakin kuvia.

5. Mitä kartioleikkausta edustaa yhtälö $x_1^2 + 24x_1x_2 - 6x_2^2 = 5$

   Muunna yhtälö pääakselimuotoon ja piirrä kuva. (Voit ottaa mallia `KRE` Exa 6 s. 396 "Transformation to principal axes".)

   Muista: Hyperbelin luonteva parametriesitys on $x = a\cosh t, \quad y = b\sinh t$

   Maple-ohjeita: harj6ohje.mws

Ohjeita

Ominaisarvot ja -vektorit

Laskeminen

- Muodosta *karakteristinen polynomi* $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ ja määritä sen 0-kohdat, näin saat *ominaisarvot*.
- Ratkaise kutakin ominaisarvoa λ kohti lineaarinen yhtälösysteemi $(A - \lambda I)x = 0$. Ratkaisu sisältää ainakin yhden vapaasti valittavan parametrin (muussa tapauksessa teit virheen λ:n laskennassa). Ratkaisuvektorit x ovat ominaisvektoreita. (Triviaalia nollavektoria ei kelpuuteta tähän kastiin.)

Yleisiä ominaisominaisuuksia

- Kaksinkertaisen ominaisarvon tapauksessa voi olla yksi tai kaksi lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.
- Eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat LRT.
- Symmetrisen matriisin ominaisarvot ovat reaaliset ja eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat ortogonaaliset.

Matriisin diagonalisointi

Jos $n \times n$- matriisilla on n LRT ominaisvektoria, niin se on diagonalisoituva. Diagonalisointi (jos mahdollista) tarkoittaa matriisien X, D ja X^{-1} määrittämistä siten, että $A = XDX^{-1}$.

Käsin laskettaessa pitäisi osata kääntää 2×2-matriisi. Annetaan Maplen tehdä se yleisessä symbolisessa muodossa (ja generoida LaTeX-muotoon), käytä hyväksesi:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{-ad+bc} & \frac{b}{-ad+bc} \\ \frac{c}{-ad+bc} & -\frac{a}{-ad+bc} \end{bmatrix}$$