Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 5 (viikko 9 , 27.2. – 1.3.2002)

Muistutan, että 1. välikokeen viimeinen asia on ketjusääntö, differentioituvuus jää toisen välikokeen piiriin.

Hiihtolomaviikolla (8) ei pidetä luentoja, **eikä myöskään harjoituksia** (toisin kuin aikaisemmin ilmoitettiin).

Lue myös tehtäväpaperin lopussa olevat ohjeet. Ohjeita on tavallista enemmän, koska kyseltäviä asioita ei ehditä kaikilta osin käsitellä luennoilla ennen harjoituksia (ainakaan AV).

Tehtäviä on vähennetty ja lyhennetty, koska luentokyselyssä ilmeni, että tehtävät on koettu liian työläiksi ja vaikeiksi. Myös Maple-osuutta on kevennetty.

Laskaripisteiden laskentaa tämä ei heilauta. Pisteet normeerautuvat lopullisessa laskennassa suhteessa tehtävien kokonaismäärään.

Alkuviikko (AV)

1. Olkoon $f(x,y) = \ln \|\mathbf{r}\|$, missä $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Osoita, että
$$\nabla f = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2}.$$
2. Laske funktion $f(x,y) = ye^x$ suunnattu derivaatta pisteessä $(0,3)$ suuntaan $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.
3. Mihin suuntaan funktion $f(x,y) = y(1 + x + ye^x)$ suunnattu derivaatta pisteessä $(0,-2)$ on nolla?
4. Oletetaan, että differentioituvan funktion f suunnattu derivaatta pisteessä p_0 suuntaan $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ on $3\sqrt{2}$ ja suuntaan $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ on 5. Määritä funktion gradientti ∇f pisteessä p_0
5. Olkoon $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$.
Määritä pinnan $z = f(x,y)$ tangenttitaso pisteessä $(2,-1)$.

Loppuviikko (LV)

1. Tornin korkeuden selvittämiseksi mitataan maanpinnan kahdesta pisteestä A ja B korkeuskulma tornin huippuun. Olkoot kulmat 50° ja 35°, kumpikin mitattuna yhden asteen tarkkuudella. Etäisyys AB on 100 m 1%:n mittaustarkkuudella.

   Miten korkea on torni ja mikä on likimääräinen maksimivirhe ? Mille kolmesta mittauksesta korkeustulos on herkistynein ("sensitiivisin").

   Kommentti: Tämä on periaatteessa samaa tyyppiä kuin harj. 4:n kolmiomaa-ala-lasku, siis differentiaalin käyttöä. Derivoinneissa on varmasti hyötyä Maplesta (käsin ehkä hiukan työläs).

2. Maaston korkeus (merenpinnasta mitattuna) karttakoordinaattien funktiona olkoon $h(x,y) = -x^2 + 4xy - 8y^2 + 300$. Positiivinen x-akseli osoittaa itään ja positiivinen y-akseli pohjoiseen. Kulkuri K ottaa pisteestä $(1, 2, h(1,2))$ lähtöaskeleen kaakkoon. Nouseeko hän vai laskeutuuko?

   Tämä on käsinlaskutehtävä. Havainnollistaminen Maplella on toki suositeltavaa. Pintapiirros: `plot3d`, korkeuskäyrät: `contourplot` tai `implicitplot`. Leikkauskäyrä kaakko-luode-suuntaisen pystytason kanssa ...

3. Määritä lieriöiden
$$x^2 + y^2 = 2, \quad y^2 + z^2 = 2$$
   leikkauskäyrän pisteen $(1,-1,1)$ kautta kulkevan tangentin yhtälö.

   Lieriöpinnan piirtäminen sujuu hyvin `plot3d`:llä. Kannttaa ajatella lieriö (kahdesta parametristä riippuvana) parametrimuotoisena pintana. Ensimmäisen lieriön luonnollinen parametriesitys on $x = \sqrt{2}\cos t, y = \sqrt{2}\sin t, z = z$. Tässä siis t ja z ovat parametreja.

   Edellinen voisi näyttää tältä:

   ```
   plot3d([sqrt(2)*cos(t),sqrt(2)*sin(t),z],t=0..2*Pi,z=c..d);
   ```

   Jälkimmäinen vastaavasti. Kuvat yhdistetään:

   ```
   display(kuva1,kuva2);
   ```

   Huom! `plot3d` on monipuolinen funktio, sille voi antaa pinnan muodossa $f(x,y)$, mutta myös parametrimuodossa yllä kaavailtuun tapaan.

4. Muodosta tehtävän 2 funktion $h(x,y)$ gradienttifunktio (gradienttikenttä). Piirrä gradienttikenttä `plots`-pakkauksen funktiolla `fieldplot`. Yhdistä korkeuskäyräpiirros tämän kanssa `display`-funktion avulla.

Ohje: Gradienttikentän voi laskea käsin tai derivoimalla Maplen `diff`:llä tai `linalg`-pakkauksen funktiolla `grad`. Ei ole pahitteeksi, jos kokeilet kaikkia tapoja.

Ohjeita

Suunnattu derivaatta ja gradientti

[LP] ss. 71 – 73

- Suunnattu derivaatta pisteesä p_0 vektorin $\mathbf{v}$ suunassa saadaan lasketuksi pisteessä p_0 lasketun gradientin ja suuntayksikkövektorin sisätulona.
- Siispä funktio kasvaa nopeimmin gradientin suuntaan ja sen kasvu on 0 gradienttia vastaan kohtisuoraan suuntaan.
- Suunta, johon funktion kasvu on 0 on tasa-arvokäyrän (tai -pinnan) tangentin (tangenttitason) suuntainen, joten gradientti on normaalin suuntainen.

Pinnan normaali ja tangenttitaso

Jos pinnan yhtälö esitetään muodossa $F(x, y, z) = 0$, saadaan edellisen perusteella pinnan tangenttitason yhtälö pisteessä p_0 näin:

$\nabla F(p_0)\dot{(}p - p_0) = 0$

Jos pinta on annettu muodossa $z = f(x, y)$, saadaan siten normaalin suunta funktion $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ gradienttina.

Tästä seuraa, että pisteeseen p_0 asetetun tangenttitason yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$z - z_0 = f_1(p_0)(x - x_0) + f_2(p_0)(y - y_0).$$

($f_1$ja f_2 tarkoittavat osittaisderivaattoja.)

Kahden pinnan leikkauskäyrän tangentti

Leikkauskäyrän tangentti on kohtisuorassa molempien pintojen normaalia vastaan (eikö vain!). Siten leikkauskäyrän tangentin suuntainen vektori saadaan pinnan normaalivektorien ristitulona $\mathbf{t} = \mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2}$.

Maple-ohjeita

```
with(linalg): with(plots):
fieldplot(grad(f(x,y),[x,y]),x=a..b, y=c..d,arrows=slim,color=x);
# a:lla, b:llä jne. oltava tietysti numeeriset arvot.
```