Teknillinen korkeakoulu Apiola/Pajukangas
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 11 (viikko 16 , 17–19.4.2002)

Alkuviikko (AV)

1. Helsingin leveysaste on 60° (pohjoista leveyttä) ja pituusaste 25° itäistä pituutta. Vastaavat arvot Tokion kohdalla ovat 35° ja 140°. Maapallon säde $R = 6370$ km.

   Mikä on kaupunkien välinen etäisyys. Vihje: Lyhin etäisyys saadaan kulkemalla pitkin isoympyrää. Laskussa tarvitaan vain palloordinaattiesitystä ja perusvektorilaskua (ei integrointia tms.).

   Vast. 7906 km

2. Kuinka suuri osa maapallon pinnasta sijaitsee leveyspiirin 60° pohjoispuolella? (Valmiin kaavan (MAOL?) käyttö ei kelpaa.)

3. Laske funktion $f(x, y, z) = x^2 + 1$ integraali yli lieriöpinnan $x^2 + y^2 = 2,\quad 0 \le z \le 1$.

4. Olkoon $\mathbf{F} = (e^{2y}, e^{-2z}, e^{2x})$ ja pinta S: $\mathbf{r} = (3\cos u, 3\sin u, v)$, $0 \le u \le \frac{\pi}{2}, 0 \le v \le 2$.
   Hahmottele pinta ja laske vektorifunktion (kentän) F vuo yli pinnan S, eli
   $$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$
   Vast. $2\sinh 6$ (ellei jossain lyöntivirhettä).

5. Määritä puolipallon $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $z > 0$ pinnan ala, joka jää lieriön $x^2 + y^2 = 2ay$ sisäpuolelle.
   Vast: $4a^2(\pi - 2)$.

Loppuviikko (LV)

1. *Torus* (munkkirinkilä) syntyy, kun yz-tasossa oleva $(a, 0)$-keskinen, b-säteinen (pikku)ympyrä ($b < a$) pyörähtää z-akselin ympäri (niin, että ympyrän taso kulkee koko ajan z-akselin kautta. (Vrt. [KRE] s. 502)

   Muodosta toruksen parametriesitys (selitä, miten syntyy) ja laske pinta-ala sekä piirrä sopivilla a:n ja b:n arvoilla.

   Vast. $4\pi^2 ab$.

   Saat kokeilla tubeplottia, vaikka plot3d onkin "must".

   Tämä on hieman liian valmiina KRE-kirjassa, tarkoitus on, että ymmärrät hyvin ja osaat selostaa.

2. Piirrä tehtävän AV 4 pinta S ja vektorikenttä $\mathbf{F}$ (samaan kuvaan) (plot3d ja fieldplot, kts myös, L/pintaint.mws)

   Laske tehtävä Maple-avusteisesti. Huomaa, että `linalg`:ssa on `crossprod, dotprod (innerprod)`. Vektorifunktio(lausekkeen) derivointi käy kätevästi tyyliin `map(diff,lista,u)`.

3. Laske ja piirrä toinen samantyyppinen tehtävä: $\mathbf{F} = (x^2, y^2, z^2)$ ja pinta S: $\mathbf{r} = (u\cos v, u\sin u, 3v)$, $0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\pi$.

   Tarkoitus oli alunperin olla "kierreporraspinta", jonka hahmottaminen suoraan parametriesitystä lukemalla on aika helppoa, eli:

   pinta S: $\mathbf{r} = (u\cos v, u\sin v, 3v)$, $0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2\pi$.

   Mallivastauksissa on laskettu molemmilla.

4. Piirrä pinta $\mathbf{r} = (2 + \cos v)(\cos u\mathbf{i} + \sin u\mathbf{j}) + \sin v\mathbf{k}$ $0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le \pi$, ja laske sen keskiö ("centroid").

   Keskiö lasketaan muuten samoilla kaavoilla kuin harj9. tehtäväpaperin ohjeissa, paitsi nyt kyseeessä ovat pintaintegraalit (ja massakeskipisteen tapauksessa pintatiheys).

Ohjeita

Torus

Parametriesitys voidaan muuttaa `plot3d`:llä grafiikaksi, kuten aina.

Kts.

`http://www.math.hut.fi/teaching/v/2/02/L/int23d.html ja .mws,`
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/2/02/H/harj10ohjev21.html`
`ja harj10ohje.mws , myös harj11ohje.mws.`

Toisaalta Maplessa on kiintoisa funktio `tubeplot`, jonka avulla piirto menisi tähän tapaan:

```
> with(plots):
> tubeplot([a*cos(t),a*sin(t),0],t=0..2*Pi,radius=b,scaling=constrained);
```

Ideana on, että parametrimuodossa annetun käyrän, tässä xy-tason a-säteisen ympyrän, pisteisiin sijoitetaan käyrän normaalitasossa oleva ympyrä, jonka säde annetaan valitsimella `radius=...`. Tässä siis `radius=b`, mutta yleisesti säde saa myös olla käyräparameterin mukaan muuttuva. Kokeile vaikka:

```
> tubeplot([a*cos(t),a*sin(t),0],t=0..4*Pi,radius=1/sqrt(t));
```

Niin hauskaa kuin tubeplotilla leikkiminen onkin, **vaatimuksena** on, että teet kuvan joka tapauksessa **plot3d**:llä, koska se on aivan yleinen parametriesitystyökalu. Siinä on hyvä kokeilla myös, miten saat vain osan torusta joko "pituus"- tai "leveyssuunnassa".