Teknillinen korkeakoulu
Matematiikka

Apiola/Pajukangas

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 10 (viikko 15 , 10–12.4.2002)

Alkuviikko (AV)

1. Laske kappaleen tilavuus, jota rajoittavat yläpuolelta pinta $z = xy^2 + y^3$ ja alapuolelta xy-tason neliö $R = \{(x,y)|0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\}$

2. Laske integraali
$$\int_A (xy + y^2)da,$$
missä A on kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(1,0),(0,1),(-1,0)$.

3. Laske $\int\int_A \ln x da$, missä A on suoran $2x + 2y = 5$ ja hyperbelin $xy = 1$ rajoittama alue.

4. Laske integraali
$$\int_0^4 dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} e^{y/x} dx.$$
Vihje: Integrointi tyssää heti alkuunsa, vai mitä! Ainoaksi toivon kipinäksi jää kokeilla integrointijärjestyksen vaihtamista. No kokeile, niin huomaat oikein laskien päätyväsi tulokseen $e^2 - 1$.

5. Määritä napakoordinaateissa annetun lemniskaatan $r^2 = 4\cos 2\Theta$ sisään jäävän alueen pinta-ala.

   Vihje: Kun asiaa tutkailet, huomaat, että kyseessä on ∞:n näköinen silmukka, jonka alan saat kertomalla 2:lla alueen, joka piirtyy, kun $\Theta \in \{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\}$

6. Määritä paraboloidien $z = x^2 + y^2$ ja $3z = 4 - x^2 - y^2$ rajoittaman kappaleen tilavuus. Piirrä myös kuva. Kannattaa käyttää napakoordinaatteja.

Ohjeita

Pinta-alkioiden muuntosuhde siirryttäessä napakoordinaatistoon:

$dxdy = rdrd\Theta$.

Loppuviikko (LV)

LV-tehtävissä kannattaa periaate miettiä etukäteen, integrointitekniikan voi pääsääntöisesti jättää Maplen huoleksi.

Piirto-ym. ohjeita: `H/harj10ohje.mws`

1. Laske sopivan muuttujanvaihdon avulla integraali
$$\int_D (2x+3y)^2(x-5y)^2 dxdy,$$
missä $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |2x + 3y| \leq 4, |x - 5y| \leq 3\}$.
2. Laske $\int xdV$ yli tetraedrin, jota rajoittavat koordinaattitasot ja taso $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
3. Osoita laskemalla muunnoksen Jakobin determinantti, että pallokoordinaateissa lausuttu tilavuusalkio on
$$dV = \rho^2 \sin\phi d\Theta d\phi d\rho.$$
4. Määritä kartion $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ja pallon $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ sisään jäävän, xy-tason yläpuolella olevan "jätskitötterön"tilavuus.

   Laske sekä (a) sylinteri- että (b) pallokoordinaateissa.

   Piirrä kuva Maplella. (`H/harj10ohje.mws`)
5. (a) Määritä kuution $[0,a] \times [0,a] \times [0,a]$ massakeskipiste, kun tiheys $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

   (b) Määritä Pallon $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 1. oktantin $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ geometrinen keskipiste ("centroid").
6. Laske ja havainnollista luentotehtävä(ä) pallon $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$ja lieriön $x^2 + y^2 = 2ay$ sisään jäävän alueen tilavuudesta.

   Käytä integrointiin Maplea ja tietysti piirtoon. Yksityiskohtaisia ohjeita tiedostossa `H/harj10ohje.mws`.

Ohjeita

Pallokoordinaatit

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\Theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\Theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

Momentteja, massakeskipisteitä

Olkoon kappaleen D tiheys paikasta riippuva: $\rho(x, y, z)$. *Momentti* tason $x = x_0$ suhteen:

$$M_{x=x_0} = \int_D (x - x_0)\rho(x, y, z)dV = M_{x=0} - x_0 m,$$

missä m on kappaleen D massa (m:n integraalikaavan osaat kirjoittaa itse).

Vastaavasti määritellään momentit $M_{y=y_0}$ ja $M_{z=z_0}$.

Massakeskipiste on sellainen piste $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, jonka suhteen lasketut momentit $M_{x=x_0}$, $M_{y=y_0}$ ja $M_{z=z_0}$ ovat nollia. Ts. $x_0 = \frac{M_{x=0}}{m}, y_0 = \frac{M_{y=0}}{m}, z_0 = \frac{M_{z=0}}{m}$.

Keskiö, eli geometrinen keskipiste on homogeenisen kappaleen (tiheys=vakio) massakeskipiste. Se siis saadaan asettamalla vaikka $\rho = 1$ yllä.