Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2002
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 1 (viikko 4 , 23 – 25.1.2002)

Harjoitussysteemi:

ke 10–12: AV: Perinteinen liitutauluharjoitus
to 10–12: KV: Yhdessä työskentelyä, muutakin kuin ohjelmiston syntaksia. Joka toinen viikko ohjatusti.
pe 10–12: LV: Oppilaat esittelevät omia ratkaisujaan, videotykki, liitutaulu, www-sivut, Maple-ws:t ym. Osa tehtävistä voi edelleenkin olla puhtaasti liitutaulutehtäviä, osassa taas Maplesta voi olla jonkinverran tai jopa paljonkin hyötyä.

Ylimääräinen Maple-harjoitus to 17.1.

Aluksi kertaamme kompleksilukuja ja lukujonoja (niin $\mathbb{R}$ kuin $\mathbb{C}$). Kompleksiluvut: [AG] Luku 3 ss. 41 – 47 tai [KRE]
Lukujonot: [RA] 2.1,2.1.

Alkuviikko (AV)

1. Määritä kompleksiluvun z reaaliosa $\Re z$, imaginaariosa $\Im z$, itseisarvo $|z|$ ja argumentin päähaara $Arg\ \ z$, kun
   (a) $z = \frac{1-i}{1+i}$ (b) $z = (\frac{1+2i}{1-i})^2$
   Piirrä kumpikin piste kompleksitasoon. Lausu (b)-kohdan argumentti arctan-funktion päähaaran avulla ja laske myös likiarvo.
   Sopimus: $-\pi < Arg\ \ z \leq \pi$
2. Laske ja piirrä kaikki juuret $\sqrt[n]{1+i}$, kun $n = 3$ ja $n = 4$.
3. Lausu *De Moivre'n kaavaa* hyödyntäen $\cos 3\Theta$,$\cos 4\Theta$ ja $\sin 5\Theta$ $\cos\Theta$:n ja $\sin\Theta$:n avulla.
4. (a) Ratkaise yhtälö $z^2 - (5+i)\,z + 8 + i = 0$.
   (b) Osoita, että reaalikertoimisen polynomin kompleksiset 0-kohdat ovat pareittain toistensa liittolukuja.
   (Niinpä voit pelkästään ratkaisuja katsomalla päätellä, että (a)-kohdan yhtälö ei ole reaalikertoiminen.)
5. Todista kompleksilukujen kolmioepyhtälö:
   $$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
   Vihje: Aloita siitä, ett $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})$. Käytä hyväksesi kaikenlaisia liittolukuominaisuuksia ja myös sitä, että $\Re z \leq |z|$.
6. Olkoon ω juuren $\sqrt[n]{1}$ päähaara, ts. arvolla $k = 1$ juurikaavasta saatava.
   (a) Osoita, että kaikki ykkösen n:nnet juuret voidaan lausua muodossa $1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{n-1}$.
   (b) Osoita, että ykkösen n:nsien juurien summa = 0. Vihje: Muista, että geometrisen summan kaava on keksitty (varmaan osaat sen johtaakin).

Loppuviikko (LV)

Hakemisto H viittaa `www.math.hut.fi/v/2/02/H` - hakemistoon. Vastaavasti L. Jatkossa en aina toista koko URL:ia.

1. Johda kompleksisen exp-funktion yhteenlaskukaava
   $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$
2. Kompleksiluvulla $e^{i\alpha}$ kertominen suorittaa kierron kulman α verran. Tämähän on vanha C1-tuttu olio, tason $\mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, jolla niin ollen on matriisiesitys. Johda kiertokuvauksen matriisiesitys muodostamalla tulo $w = e^{i\alpha}z$, $z = x + iy = re^{i\Theta}$
3. Lataa itsellesi `H/harj1ohje.mws` ja `H/complex.mws`, voit vaikka avata ne suoraan FILE-valikon open URL valinnalla. Tee oma `harj1.mws` -työarkki. Käytä pohjana joko `maple/harjpohja.mws`:ää tain napsuttele Insert-valikon Section-valinnalla muutama "section- painike.
   Tutustu kohtaan *'Kompleksilukupisteiden piirtoa'* ja selvitä itsellesi huolellisesti (omia kokeiluja tekemällä sekä ankarasti ajattelemalla), miten eri piirtotavat toimivat.
   Piirrä tehtävän AV 2 kuvat Maplella (Pelkät pisteet, pisteet yhdistettynä ja säteet (animaation kera ja ilman).) Piirrä tietysti sitten isommilla n:n arvoilla ja vaihtele myös lukua z, jonka juuria muodostat.

Kokeile erilaisia ohjetyöarkeissa neuvottuja työtapoja ja sisäistä (sekä nautiskele ja ihastele).

Harjoituksissa näytetään videotykillä ja assistentti kiertelee katsomassa muidenkin kuin esittäjän aikaansaannoksia (ja saa kysyä ja kommentoida!).

4. Annettuna on rekursiivisesti määritelty lukujono: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1+2a_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Määritä $\lim_{n\to\infty} a_n$.

   Vihje: Oleta, että raja-arvo on olemassa, merkitse sitä vaikka a:lla. Ratkaise a. Tätä tietoa voit käyttää hyväksesi osoittaessasi (induktiolla), että lukujono on ylhäältä rajoitettu. Osoita lisäksi (induktiolla) jono kasvavaksi. Sovella sitten [MR]-lausetta (`http://www.math.hut.fi/teaching/v/2/02/L/sarjat.pdf`.) Panosta päättelysi logiikkaan.

   Piirrä lopuksi pisteitä $(n, a_n), n = 1, 2, \ldots$.

```
> N:=...:  # numeroarvo.
> a[1]:=1.0: for n from 1 to N do a[n+1]:=sqrt(...): od:
> pisteet:=seq([n,a[n]],n=0..N);
> plot([pisteet],style=point,symbol=circle);
```

   (Kokeile huvin vuoksi, miltä pisteiden jono näyttää, jos alustat `a[1]:=1` (ota tällöin pieni N, korkeintaan 10). (Maple-työskentelyssä kannattaa aina kokeilla vastaavassa tilanteessa ensin pienellä N:llä ja mielellään tallettaa työarkki ennen kokeilemista.))

5. Osoita seuraavien sarjojen suppeneminen suorastaan määrittelemällä niiden summat. Siis johda ensin lauseke osasummille s_n .

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}}$, b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

6. Arvioi sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{2^n n}$ jäännöstermiä sopivalla geometrisella sarjalla. (Tietysti tarkastelet itseisarvosarjaa.)

   Kuinka monta termiä sarjasta on otettava, jotta virhe olisi korkeintaan 5×10^{-6}. Laske kyseinen osasumma. Käytä ihmeessä Maplen palveluja.

   `?add, ?sum`.