Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 8 (viikko 12 , 23.3.01)

Nämä siis kuuluvat 2. välikokeen aihepiiriin.

Loppuviikko, pe 23.3.

Maplevihjeitä: `..H/minmax.mws`

1. (a) Määritä funktion $f(x,y) = \frac{1}{2+x-2y}$ astetta 3 oleva Taylorin polynomi kehitettynä pisteessä $(2,1)$

   (b) Samat sanat funktiolle $f(x,y) = \cos(x + \sin y)$, mutta asteluku olkoon 4 ja piste $(0,0)$.

   Vihje: (a)-kohdassa kannattanee muokata muotoon $K\frac{1}{1+t}$ ja muistella taas kerran geometrista sarjaa. Toki kannattaa verrata suoraan derivoimalla saatavaan, onhan Maple käytettävissä.

   (b)-kohdassa nyt erityisesti kannattaa pyytää Maplelta derivointiapua.

   Voit lopuksi kokeilla valmista Maplen `mtaylor`-funktiota ja korkea-asteisempiakin polynomeja.

   Kts myös `..H/minmax.mws`

2. Muodosta edellisen tehtävän a)- ja b)-kohtien funktioiden 2. asteen Taylorin polynomit laskemalla gradientti ja Hessen matriisi (`linalg[grad],linalg[hessian]`) a.o. pisteessä ja käyttämällä kaavaa $f(a+h) = f(a) + h^T \nabla f(a) + \frac{1}{2} h^T H(a) h + R_2(h)$.
   (Siis sijoitat vain kaavaan, lasket ja vertaat (tosi helppo).)

3. Määritä funktioiden
   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ (b) $f(x,y) = \cos x + \cos y$
   kriittiset pisteet ja niiden luonne (KRP, min/max/eiää(satula)/singulaari)

4. (a) Määritä funktion $f(x,y) = 1/x + 1/y + \sin(x^2y^2)$ suurin ja pienin arvo joukossa $[1,2] \times [1,2]$
   (b) Määritä f:n pienin arvo koko $\mathbb{R}^2$:ssa

5. Joudut tekemään vastuunalaisen päätöksen mitoista valmistettaessa laatikkoa. Pohjamateriaali on kaksi kertaa niin kallista pinta-alayksikköä kohti kuin sivu- tai kansimateriaali. Millä mitoilla saat V-tilavuuksisen laatikon materiaalikustannukset minimoiduksi? Perustele, että ratkaisusi on globaali minimi joukossa $\{(x,y) | x > 0, y > 0\}$. (Toisia derivaattoja ei välttmättä tarvita.)

6. Olkoon $f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Osoita, että origo on kriittinen piste. Osoita edelleen, että se on paikallinen minimi, jos rajoitutaan mielivaltaiseen O:n kautta kulkevaan suoraan. Osoita, että O ei ole funktion paikallinen minimi $\mathbb{R}^2$:ssa.

   (Ehkä tämä herättää vanhoja muistoja raja-arvotehtävästä, jossa samoja paraabeleita tarkkailtiin.)