Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 8 (viikko 12 , 19–23.3.01)

Toinen välikoe on maanantaina **26.3.** (klo 12 - 15). Alueeseen kuuluvat vielä nämä AV:t sekä myös harj8lv .

Muista taas pe 16.3 klo 10 – 12 salissa *U345*

Alkuviikko, ke 21.3.

1. Olkoon A $(n \times n)$-matriisi.
   a) Osoita, että A:lla ja A^T:llä on samat ominaisarvot.
   b) Oletetaan, että A on kääntyvä. Olkoon x ominaisarvoon λ liittyvä ominaisvektori. Osoita, että $1/\lambda$ on A^{-1}:n ominaisarvo ja $y = Ax$ siihen liittyvä ominaisvektori (tai miksei myös x). Mistä tiedät, että $\lambda \neq 0$?
   c) Jos λ on A:n ominaisarvo, niin osoita, että λ^m on A^m:n ominaisarvo.

2. Osoita, että matriisin A determinantti $det(A)$ on ominaisarvojen tulo, ja diagonaalialkioiden summa ($tr(A)$ ("trace", "jälki")) on ominaisarvojen summa.

   Selvitä (luennolla esitetty) definiittisyystarkastelu 2×2-matriisille $det(A)$:n ja $tr(A)$:n avulla ilmaistuna ja totea, että suuremmilla n:n arvoilla tarvitaan lisäehtoja (kaikki päälävistäjädeterminantit, mutta jätetään muotoilematta ja opettelematta).

3. Osoita, että *Fibonaccin* jono F_k saadaan iteraatiolla:

   $u_0 = [1, 0]$, $u_{k+1} = Au_k$, missä $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (Vektorin u_k toinen komponentti on F_k .)

   Diagonalisoi matriisi A ja laske sitten kaava F_n:lle.

   Voit hyödyntää näitä Maple-rivejä. (Vaihtoehtoisesti voit vain laskea ominaisarvot ja -vektorit ja lausua u_0:n ominaisvektorikannan avulla ja jatkaa siitä luonnolliseen tyyliin enemmän vektori- kuin matriisipainotteisesti (samasta asiasta on tietysti kyse).)

```
> matrix([[a,b],[1,1]]);inverse(%);
```

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(-a+b)^{-1} & \frac{b}{-a+b} \\ (-a+b)^{-1} & -\frac{a}{-a+b} \end{bmatrix}$$

Laske vielä likiarvo F_{100}:lle.

4. Olkoon p_0 funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ määrittelyjoukon sisäpiste. Piste p_0 on funktion paikallinen (lokaali) minimipiste, jos on olemassa ympäristö $U(p_0)$, jossa pätee $f(p) \geq f(p_0)$ $\forall p \in U(p_0)$. Vastaavasti määritellään maksimi.

   Osoita, että funktion lokaalissa minimipisteessä p_0 on $\nabla f(p_0) = 0$. (Tietysti sama pätee maksimissa.)

   Vihje: Tarkastele funktiota rajoitettuna koordinaattiakseleiden suuntaisille janoille ja sovella yhden muuttujan funktioden oppeja.

5. Tehtävät 5 ja 6 (täydellinen suoritus oikeuttaa kahteen rastiin)

   Määritä ja luokittele kriittiset pisteet (gradientin 0-kohdat) funktiolle

   $$f(x, y) = x^2 y e^{-(x^2+y^2)}$$

   Selvitä myös globaalien ääriarvojen tilanne koko $\mathbb{R}^2$:ssa. Kannattaa lisäksi piirtää, jos pääset Maplen ääreen.

   Voit käyttää laskutyön vähentämiseksi Maple-istunnon tuloksia:

```
> restart: with(linalg):
> f:=x^2*y*exp(-x^2-y^2):
> grad(f,[x,y]):map(l->collect(l,exp(-x^2-y^2)),%);
```

$$\left[\left(2\,xy - 2\,x^3 y\right) e^{-x^2-y^2}, \left(x^2 - 2\,x^2 y^2\right) e^{-x^2-y^2}\right]$$

```
> H:=hessian(f,[x,y]);map(l->collect(l,exp(-x^2-y^2)),%):
```

$$\begin{bmatrix} \left(2\,y - 10\,x^2 y + 4\,x^4 y\right) e^{-x^2-y^2} & \left(2\,x - 2\,x^3 - 4\,xy^2 + 4\,x^3 y^2\right) e^{-x^2-y^2} \\ \left(2\,x - 2\,x^3 - 4\,xy^2 + 4\,x^3 y^2\right) e^{-x^2-y^2} & \left(-6\,x^2 y + 4\,x^2 y^3\right) e^{-x^2-y^2} \end{bmatrix}$$

Huom: Muista käyttää aina tarpeen mukaan **alkuperäistä ääriarvon määritelmää**. Sillä selvität aivan helposti semidefiniitit tapaukset.