Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 7 (viikko 11 , 12–15.3.01)

Tutorointi/ryhmätyö alkaa pe 9.3.

Aloitamme tutorointikokeilun pe 9.3 klo 10 – 12 salissa *U345* ($3^2 + 4^2 = 5^2$). Tällöin kaikki halukkaat voivat kokoontua laskemaan ja kyselemään ja viettämään aikaa matematiikan, kahvin, ym. seurustelun merkeissä. Kysymyksiä voi esittää mukana olevalle teekkari *Juha Ojalalle*, jolle voi samalla purkaa kaikkia niitä paineita, jotka on joutunut autoritäärisen luennoitsijan läsnäollessa tukahduttamaan.

Alkuviikko

1. Kolmionmuotoisen maa-alueen kahden sivun pituudet olkoot $a = 31$ m ja $b = 46$ m, sivujen välinen kulma $\alpha = 72°$. Pituudet on mitattu puolen metrin tarkkuudella ja kulma yhden asteen tarkkuudella. Arvioi differentiaalin avulla pinta-alan absoluuttista ja suhteellista virhettä. (Varmasti osaat johtaa alan kaavan: $\frac{1}{2}ab\sin\alpha$)

   (Voit huvin vuoksi laskea myös tarkan virheen ja verrata.)

2. Olkoon $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differentioituva pisteessä p Luennolla osoitettiin, että $\nabla f(p)$ on kohtisuorassa pisteen p kautta kulkevaa tasa-arvopintaa $f(x, y, z) = C$ vastaan.

   Osoita sama asia toisella tavalla.
   Periaate: Pidetään tunnettuna, että parametrimuodossa annetun käyrän $(x = u(t), y = v(t), x = w(t))$ tangenttivektori saadaan derivoimalla komponentifunktiot. Tarkastellaan mielivaltaista pinnalla $f(x, y, z) = C$ sijaitsevaa, pisteen p kautta kulkevaa derivoituvaa käyrää $(u(t), v(t), w(t))$. Pinnallekuulumisehdosta saat yhtälön, josta derivoimalla ja ketjusääntöä käyttämällä johtopäätös tipahtaa kuin itsestään.

3. a) Määritä funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ pisteen $\mathbf{p} = (2, -1)$ kautta kulkevan korkeuskäyrän tangentti tässä pisteessä.

4. Määritä seuraavien pintojen tangenttitasojen yhtälöt annetuissa pisteissä:
   (a) $z = \arctan\frac{y}{x}$, pisteessä $(2, 2, \pi/4)$.
   (b) Ellipsoidi $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 48$, pisteessä $(4, 2, 1)$
   (c) Elliptinen kartio $x^2 - 5y^2 - z^2 = 0$, pisteessä $(4, 2, 6)$.

   Jos pääset Maplen ääreen, piirrä ihmeessä kuvat. (Nykyversio tangtasofunktiosta sopii (a)-kohtaan, (b) ja (c) kannattanee tehdä suoraan ongelmakohtaisesti.)

5. Määritä sylinteripintojen
   $x^2 + y^2 = 2$ ja $y^2 + z^2 = 2$ leikkauskäyrän tangentti pisteessä $(1, -1, 1)$ ja hahmottele kuvaa (Hienon Maplekuvan voit säästää loppuviikoksi).

6. Laske matriisien A ja B ominaisarvot ja -vektorit, kun

   a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

   Selvitä ominaisarvojen algebrallinen kertaluku (karakteristisen polynomin juuren kertaluku). Selvitä myös kunkin ominaisarvon geometrinen kertaluku, ts. kuinka monta lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria kussakin ominaisavaruudessa on.

   Huom! Aihetta ei vielä ehditty käsitellä luennolla. Silti kannattaa mainiosti laskea jo perjantaina (9.3.) (mikseipä to 8.3). Lisäapua saat perjantaina (10-12) *Juha Ojala*:lta

   Pikaohje:

   - Muodosta *karakteristinen polynomi* $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ ja määritä sen 0-kohdat, nämä ovat nimeltään *ominaisarvot*.
   - Ratkaise kutakin ominaisarvoa λ kohti lineaarinen yhtälösysteemi $(A - \lambda I)x = 0$. Ratkaisu sisältää ainakin yhden vapaasti valittavan parametrin (muussa tapauksessa teit virheen λ:n laskennassa). Ratkaisuvektorit x ovat ominaisvektoreita. (Triviaalia nollavektoria ei kelpuuteta tähän kastiin.)
   - Kaksinkertaisen ominaisarvon tapauksessa voi olla yksi tai kaksi lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Kummalla tavalla tässä on?

     Kts. myös: `http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/L/L_ominaisarv`