Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 6 (viikko 10 , 5–9.3.01)

Alkuviikko, ke 7.3.

1. (a) Osoita, että funktiot $e^{kx}\cos(ky)$ ja $e^{kx}\sin(ky)$ toteuttavat *Laplacen osittaisdifferentiaaliyhtälön*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

   Tällaisia funktioita sanotaan *harmonisiksi funktioiksi.*

   (b) Osoita, että funktio $f(x,t) = u(x+at) + v(x-at)$, missä u ja v ovat kahdesti derivoituvia funktioita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja a vakio, toteuttaa osittaisdifferentiaaliyhtälön $f_{tt} = a^2 f_{xx}$, ns. aaltoyhtälön. Tarvitset vain tavallista yhden muuttujan funktion ketjusääntöä.

2. Olkoon $f(x,y) = x^3y^2 + x^4 \sin y + \cos(xy)$. Laske osittaisderivaatat f_{xxy}, f_{xyx}, f_{yxx} ja totea, että ne ovat samat.

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \textit{kun} \;\; x = 0 \;\; \textit{tai} \;\; y = 0 \\ 1, & \textit{muuten} \end{cases}$$

   Osoita, että f:llä on osittaisderivaatat 0:ssa, mutta f ei ole jatkuva 0:ssa .

4. Osittaisderivoituvan funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *gradientti* ∇f määritellään näin $\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\mathbf{i} + f_y(x,y)\mathbf{j}$.

   Olkoon $f(x,y) = |xy|$.
   (a) Piirrä tasa-arvokäyrät(korkeuskäyrät) $f(x,y) = k, k = 1,2,3.$

   (b) Piirrä f:n gradienttivektoreita $\nabla f(x,y)$ tasa-arvokäyrien pisteisiin. Kun käytät samaa skaalaa akseleilla, voit tehdä kuvan perusteella hypoteesin, no tee! (Piirtäminen sujuu varmasti hyvin myös käsin.)

5. Laske yhdistetyn funktion derivoimissääntöä (eli ketjusääntöä, "chain rule") käyttäen $\frac{\partial w}{\partial s}$ ja $\frac{\partial w}{\partial t}$, kun

   (a) $w = x\ln(x^2+y^2), \quad x = s+t, y = s-t$,
   (b) $w = e^{x+2y}\sin(2x-y), \quad x = s^2+t^2, \quad y = 2s^2 - t^2$

6. Mihin suuntaan funktio $f(x,y) = x^3 - 2xy^2z + 5yz^4$ kasvaa nopeimmin pisteessä $(2,-2,1)$? Mikä on funktion derivaatta tähän suuntaan? Piirrä funktion kuvaaja rajoitettuna tälle suunnalle.

   Tässä tarvitaan tietoa, joka nyt paljastettakoon: Funktio kasvaa nopeimmin gradientin suuntaan. Suunnattu derivaatta esitetään tiistain luennolla, saadaan lasketuksi gradientin ja suuntayksikkövektorin sisätulona.