Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 5 (viikko 9 , 2.3.01)

1. Mitkä ovat seuraavien funktioiden luonnolliset määrittelyjoukot:

   a) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, b) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ c) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, d) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, e) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2-y^2}$.

   Hahmottele määrittelyjoukon kuva (niissä tapauksissa, joissa hahmoteltavaa on). Tähän et tarvitse mitään ohjelmaa. Mitä topologisia ominaisuuksia kullakin joukolla on. (*avoin, suljettu, rajoitettu, yhtenäinen, joukon reuna*, jne.)

2. Tutki edellisen tehtävän funktioiden kuvaajia Maplea käyttäen. Jaa tarvittaessa alue osiin, esim. e)- kohdassa 4:ään osaan, jotka yhdistät `display`:llä. Käytä myös tarpeen mukaan `view`-optiota välttääksesi piirtoa alueilla, joilla funktio saa hyvin suuria arvoja.

3. Hahmottele seuraavien funktioiden kuvaajia ensin kynää ja paperia käyttäen ja sitten Maplella. Piirrä korkeuskäyriä ja leikkauskäyriä pystytasojen kanssa.

   a) $f(x,y) = \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi, 0 \le y \le 1,$
   b) $f(x,y) = |x| + |y|, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$
   c) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0$

   Pintapiirros on yleensä havainnollisempi, jos se piirretään korkeuskäyrien rajoittaman alueen päälle. Näin kannattaa tehdä b)- ja c)-kohdissa. `plot3d` on varsin etevä tässä suhteessa, sille voi antaa rajat muodossa:

   ```
   y=g1(x) .. g2(x), x=a..b
   ```

   Tässä on vielä c)-kohtaan liittyen esimerkkiohje `spacecurve`:n käytöstä, siinä piirretään napasädettä pitkin kulkevan pystytason ja annetun pinnan leikkauskäyrä (sekä projektio vaakatasossa). Varsin käyttökelpoinen tapa monessa yhteydessä.

```
> with(plots):
> f:=(x,y)->4-x^2-y^2;
> x:=r*cos(Theta):y:=r*sin(Theta): Theta:=Pi/4:
> pystyleikkaus:=spacecurve({[x,y,f(x,y)],[x,y,0]},r=0..2,th
color=blue,axes=BOX)
> x:='x':y:='y':  # On hyvä muistaa vapauttaa.
> display([pinta,pystyleikkaus],style=patchcontour); # "pint
> pystyleikkaus;  # Katsotaan pelkkää leikkauskäyrää.  # omi
```

4. Onko seuraavilla funktioilla raja-arvo, kun $(x,y) \to (0,0)$:

   a) $\dfrac{x}{|x|+|y|}$ b) $\dfrac{x^2}{|x|+|y|}$

5. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x^2 < y < 2x^2, \\ 0, & \textit{muulloin.} \end{cases}$$

   Osoita, että funktiolla on sama raja-arvo origossa lähestyttäessä mitä tahansa suoraa pitkin, mutta siitä huolimatta varsinaista raja-arvoa ei ole olemassa. Missä pisteissä funktio on jatkuva ja missä taas ei?

6. Muodosta seuraavien funktioiden 1. kertaluvun osittaisderivaatat kaikkien esiintyvien muuttujien suhteen:

   a) $x^3y^2 + x\ln(x+y)$ b) $\dfrac{xz}{x+y+z}$ c) $\ln(1+e^{x^2y^3z})$.

   Tee jotain myös käsin, ainakin osataksesi antaa arvoa Maple-avulle.