Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 4 (viikko 7 , 14 – 16.2.)

Loppuviikon tehtävissä pyritään näyttämään myös asioiden välisiä yhteyksiä, esittelemään sovellusmahdollisuuksia jne. Myös puhtaasti teoreettisia tehtäviä saattaa olla joukossa, kuten tässä näkyy. LV-harjoitus ei ole pelkästään tietokoneharjoitus, mutta tietokoneen käyttöä ei myöskään vältellä.

Torstain neuvontaharjoituksissa on tarkoitus opastaa myös matemaattisessa puolessa, vaikka alkuvaiheessa aika onkin mennyt syntaksihuoliin enimmäkseen.

Toivottavasti osanotto palautuu Harj3LV:n lukemista parempaan suuntaan. LV-harjoitus on olennainen osa kurssia.

Loppuviikko (LV), pe 16.2.

1. Tarkastellaan vuorottelevaa harmonista sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, joka siis suppenee (sano kuitenkin miksi). Osoita, että sarja voidaan järjestää niin, että summaksi saadaan 2001.

   Vihje: Tarkastele erikseen positiivisia ja negatiivisia termejä. Molempien muodostamat sarjat hajaantuvat (miksi?). Haluttu järjestys saadaan aikaan tähän tapaan:

   Otetaan ensin positiivisia niin paljon, että juuri päästään yli 2001:n (miksi voidaan?). Sitten negatiivisia niin monta, että juuri alitetaan 2001. Sitten taas positiivisia, jne.

   Näin jatkaen tulevat kaikki sarjan termit läpikäydyksi (perustele), eli haluttu järjestys saadaan, ja sarjan summa on 2001 (perustele niinikään).

   Täydennä todistus tämän ajatuksen pohjalta (ei tarvitse olla kaikin osin formaalisti täydellinen, kunhan oikeat ideat ovat kohdallaan.)

2. (a) Kehitä $\frac{1}{1+x^2}$ sarjaksi geometrisen sarjan kaavaa takaperin soveltamalla. Mikä on suppenemissäde? Integroi saamasi yhtälö puolittain 0..1 . Kuinka monta termiä saamastasi sarjasta täytyy ottaa, jotta varmasti saisit lasketuksi π:lle likiarvon 5 desimaalin tarkkuudella, entä 10 desimaalin? (*Leibnizin lauseen* virhearvio.)

   (b) Entäpä, jos käytät tätä sarjaa?

   $\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\sqrt{3}(-1)^k}{3^k(2k+1)}$.

   (c) Kuuluisan intialaisen matemaatikon *S. Ramanujanin* (1887 – 1920)
   `http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/ history/Mathematician`
   `Ramanujan.html`
   esittämän sarjan suhteen olisi kiintoisaa kysyä samaa:

   $$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}$$

   Riittää, kun teet toisen kohdista (b) tai (c).

3. Määritä seuraavien potenssisarjojen suppenemisympyrät:

   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z+3}{2k} \right)^k$, b) $\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{z}{2+(-1)^k} \right]^k$, c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} (z-i)^k$.

4. Potenssisarjan $\sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ kertoimet toteuttavat rekursion $c_1 = 1, \quad c_{k+1} = \left(k - k^2 \ln \frac{k+1}{k}\right) c_k, \quad k \in \mathbb{N}$. Määritä sarjan suppenemissäde ja piirrä summafunktion kuvaaja reaalialueella summeeraamalla sarjan termejä. Piirrä osasummien kuvaajia myös jonkin matkaa suppenemisalueen ulkopuolelle.

   Piirrä myös kompleksitasossa $|f(z)|$ z:n funktiona, argumentin mukaan väritettynä. (plot3d tai complexplot3d, muistele 1. harjoituksia.) Myös `conformal` on olemassa!

5. Kombinatoriikassa käytetään termiä *generoiva funktio*, jolla tarkoitetaan annettuun jonoon liittyvää potenssisarjafunktiota.

Määritä *Fibonaccin* lukujonon (a_n) generoiva funktio $f(z)$, missä siis $a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 1$.

Vihje: Jotta tehtävä ei olisi liian vaikea, annetaan tulos $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$. Tehtävänä on osoittaa, että näin on. Lähde liikkeelle yhtälöstä $f(z)(1-z-z^2) = 1$ ja käytä Cauchyn tuloa (konvoluutiota).

Kokeile sitten seuraavia (tai vastaavanlaisia) Maple-komentoja ja selitä tulokset:

```
f:=z->1/(1-z-z^2);
seq((D@@k)(f)(0)/k!,k=0..9);  # Funktiotyyli
[1,seq(diff(f(z),z$k),k=1..9)]: subs(z=0,%); #Lauseke
taylor(f(z),z=0,20);
series(f(z),z=0,20);
```

Tehokkaammin voitaisiin nuo kertoimet laskea tähän tapaan:

```
Taykert[0]:=f(0): ksder:=f(z): kkert:=1:
n:=30:  # Aivan huoletta
for k from 1 to n do
   ksder:=diff(ksder,z): kkert:=kkert*k:
   Taykert[k]:=subs(z=0,ksder)/kkert:
od:
 seq(Taykert[k],k=0..n);
```

Tässä samalla valaistaan joitakin diff- ja D-tyylien eroja. Sisäistäpä nämä!

6. Laske sopivaa Taylorin polynomia ja siihen liittyvää virhetermiä hyväksi käyttäen likiarvo integraalille

$$\int_0^1 \sqrt{x} e^{x^2} dx$$

siten, että virheen itseisarvo on korkeintaan 10^{-6}. Tarkoitus on laskea Taylorin kaavan jäännöstermin avulla, kuinka korkea asteluku tarvitaan, jotta virheraja varmasti alitetaan.

Laske sama tehtävä vertailun vuoksi käyttäen approksimointiin Taylorin sijasta interpolaatiopolynomia. Tee siis aivan vastaava virhearvio interpolaatiovirhekaavaa käyttäen (tätähän harjoiteltiin harj3lv:ssä). Voit käyttää tasavälistä pisteistöä.

Lopuksi voit muistella C1-asioita. Harj3lv:ssä opimme, että interpolaatiossa tapahtuva max-virhe minimoituu, kun käytetään Tsebyshev-pisteitä (Tsebyshev-polynomien nollakohtia). No integroinnin kannalta vielä parempi on käyttää Legendern polynomin nollakohtia, jolloin kyseessä on *Gaussin integrointimenetelmä*. Legengdern polynomit saat käyttöösi `with(orthopoly);`-komennolla. Tällöin esim. P(3,x); antaa 3:nnen asteen polynomin, jonka nollakohdat saat vaikkapa `fsolve`:lla. Tämä jääköön kuitenkin "ylesissivistäväksi huomioksi", taitaa mennä liian työlääksi tehtäväksi, vaikka olisikin nautittava. (Tässä tarvittaisiin vielä lineaarinen muunnos, jolla normeeratun välin $[-1,1]$ pisteet kuvataan tarkasteluvälille $[0,1]$.)

Lauseita ja kaavoja

Taylorin lause Olkoon $f \in C^{(n+1)}[a,b]$ ja $x_0 \in [a,b]$. Jokaista $x \in [a,b]$ kohti on olemassa $\xi = \xi(x) \in (x_0, x)$ (tai (x, x_0) siten että

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

missä

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Raja-arvojen määrääminen Taylorin lauseen avulla Muodostetaan funktion Taylorin polynomi kyseisessä raja-arvopisteessä. Otetaan vain tarpeellinen määrä termejä (n kpl) + $O(z-z_0)^{n+1}$. Huomaa, tässä ei ole kyseessä sarjakehitelmä, vaan äärellinen summa (polynomi+jäännöstermi). Tätä menettelyä päästään soveltamaan tehtävässä 3.