Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 4 (viikko 7 , 14 – 16.2.)

Muistutan, että viikolla 8 pidämme hiihtolomaa! (Saa laskea muun ohessa myös matikkaa.) LV-tehtävät tulevat ensitilassa.

Alkuviikko (AV), ke 14.2.

1. Määritä seuraavien sarjojen summat:
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2^n}{3^{n+2}}$ b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$,

2. Osoita, että harmoninen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, hajaantuu. Suorita tehtävä vetoamatta integraalitestiin.
   Vihje: Ryhmittele summa muotoon:

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}) + \ldots .$$

   Arvioi sulkulausekkeita alaspäin ottamalla pienin kertaa termien lukumäärä. (Tämä idea on peräisin Pariisilaiselta *Nicole Oresme*:lta (1323 – 1382) [Lähde: Bressoud: A Radical Approach to Real Analysis])

3. Mitkä seuraavista sarjoista suppenevat/hajaantuvat:
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(20+30i)^n}{n!}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{1+n\sqrt{n}}$

4. Tarkastellaan sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$. Varmasti osaat päätellä, että sarja suppenee (sano kuitenkin miksi)!

   Osoita suppeneminen suoraan integraalitestin avulla ja päättele samantien, että summa $s < \frac{\pi}{2}$. (Vihje: Aloita integrointi 0:sta.)

5. Millä z:n arvoilla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n+1}}$$

   suppenee a) itseisesti, b) ehdollisesti ja c) hajaantuu?

   Älä vetoa mihinkään potenssisarjalauseisiin, ole kuin niitä ei olisi keksittykään. Erään kompleksitason ympyräviivan saat muuten jättää selvittämättä, mutta sen leikkauspisteet reaaliakselin kanssa kuuluvat selvitettäviin.

6. Arvioi sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{2^n n}$ jäännöstermiä sopivalla geometrisella sarjalla. (Tietysti tarkastelet itseisarvosarjaa.)

   Kuinka monta termiä sarjasta on otettava, jotta virhe olisi korkeintaan 5×10^{-6}. Laske kyseinen osasumma. (Jos termejä tulee paljon, eikä käytössäsi ole Maplea, voit taskulaskinta varten valita väljemmän virherajan (vaikka vain 0.05), tarkoitus ei ole näännyttää ketään rutiinilaskuihin.)