Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 12 LV (viikko 17 , 27.4.01)

Nyt on käsillä kevään viimeinen harjoitus. Lisäksi jokaisen kansalaisvelvollisuuksiin kuuluu kyselyn täyttäminen (kunhan se ensin ilmestyy).

1. Osoita, että vektorikenttä $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz+2)\mathbf{i} + (xz-3)\mathbf{j} + (xy+5)\mathbf{k}$ on pyörteetön (konservatiivinen) ja määritä (jokin) potentiaalifunktio. Määritä käyräintegraali $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ pisteitä $(0,1,0)$ ja $(2,3,-2)$ yhdistävää polkua pitkin. Tarkista, että saat saman tuloksen integroimalla pitkin pisteitä yhdistävää janaa. Kokeile myös `potentiaali-` ja `cint3`-funktioita.

2. Laske $\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$

   (a) vastapäivään ympyräviivaa $x^2+y^2=a^2$.
   (b) myötäpäiään neliön $(\pm1,\pm1)$ reunaa pitkin.
   (c) Vastapäivään (niin, että alue jää vasemmalle) pitkin joukon $1 \le x^2+y^2 \le 2,\ \ y \ge 0$ reunaa.

   Osoita, että integroitava vektorikenttä on pyörteetön. Miksi käyräintegraalit eivät ole tiestä riippumattomia? Minkälaiset käyräintegraalit taas ovat keskenään samoja? Selitä, mistä tässä kaikessa on kyse. Osassa integrointeja voit hyödyntää `cint3:a` (tai ehkä haluat modifioida erikseen `cint2`:n.)

3. Laske
   (a) $\oint_C(\sin x+3y^2)dx+(2x-e^{-y^2})dy$, kun C on puolikaskiekon $x^2+y^2 \le a^2$, $y \ge 0$ reuna vastapäivään kuljettuna.

   (b) $\oint_C x\sin(y^2) - y^2)dx + (x^2y\cos(y^2) + 3x)dy$, kun C on pisteiden $(0,-2),(1,-1),(1,1),(0,2)$ virittämän puolisuunnikkaan reuna vastapäivään kuljettuna.

   Kokeile myös laskentaa käyräintegraaleina numeerisesti integroiden funktion *cint*3 avulla. (Ehkä kannattaa modifioida versio $fcint3$, joke tekee pelkästään numeerisesti.) Piirrä myös kuvat (ainakin se puolisuunnikas).

4. Laske *Greenin* lausetta käyttäen nelikulmion pinta-ala, kun kärjet ovat pisteissä $(0,0),(3,1),(4,4),(-1,2)$.

   Piirrä kuva `plottools`-funktiolla `polygon` tyyliin `display(polygon([[x1,y1],[x2,y2],[..],[..]],color=jokuvari);` Yhdistä samaan kuvaan (nyt hienosti toimivan) v201-funktion hila viivoitus: `hila(-1,4,5,0,4,4);` Tästä onkin helppo nähdä "tarkistuskolmiot", laske tulos myös niillä.

5. Määritä pallon $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$ pinnan ala, joka jää lieriön $x^2+y^2 = 2ay$ sisäpuolelle. Piirrä tietysti.

6. Laske harj12av tehtävän 6 toruksen pinta-ala ja piirrä viimeistään nyt (sopivilla a:n ja b:n arvoilla).

Maple-avustusta

Potentiaali

```
#
# Potentiaalifunktio 23.4.01
#
potentiaali:=proc(F)
local x,y,z;
# Tarkistettava pyörteettömyys ja 1-yhtenäisyys.
int(F[1](t,0,0),t=0..x)+int(F[2](x,t,0),t=0..y)+
int(F[3](x,y,t),t=0..z);
unapply(%,x,y,z);
end:

# Esim:
#   F:=map(unapply,[2*x*y*z,x^2*z,x^2*y],x,y,z);
#   potentiaali(F);
#   grad(%(x,y,z),[x,y,z]);
```

On v201.mpl:ssä (ainakin pian).

Sitten vaan vielä tsemppiä viimeiseen välikokeeseen ja **oikein hyvää loppukevättä ja kesää**!