Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 11 LV (viikko 16 , 20.4.01)

Pääsiäisen jälkeen pidetään normaalisti to-neuvontaharj. ja pe vakavan paikan harjoitus.

Nämä ovat nyt "perinteispainotteiset"LV-harjoitukset. Maplea kannattaa käyttää kuviin ja integrointiavustukseen sekä tarkistuksiin, yms. Aloitetaan kuitenkin "Maple-toimeksiannolla".

1. Laske AV-tehtävä 3 Maplella, piirrä kunnon kuva, ja voit laskea myös tiheämmällä jaolla b-kohtaa.

   Kts. `../integraali.mws`

2. Laske sopivan muuttujanvaihdon avulla integraali

$$\int_D (2x+3y)^2(x-5y)^2 dxdy,$$

   missä $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |2x+3y \leq 4, |x-5y| \leq 3\}$.

3. Laske $\int xdV$ yli tetraedrin, jota rajoittavat koordinaattitasot ja taso $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

4. Osoita, että pallokoordinaateissa lausuttu tilavuusalkio on $dV = \rho^2 \sin\phi d\Theta d\phi d\rho$.

5. Määritä kartion $z = \sqrt{x^2+y^2}$ ja pallon $x^2+y^2+z^2 = a^2$ sisään jäävän, xy-tason yläpuolella olevan "jätskitötterön"tilavuus.

   Laske sekä (a) sylinteri- että (b) pallokoordinaateissa.

   Piirrä kuva Maplella.

6. (a) Määritä kuution $[0,a] \times [0,a] \times [0,a] \times$ massakeskipiste, kun tiheys $\delta(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

   (b) Määritä Pallon $x^2+y^2+z^2 = a^2$ 1. oktantin $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ geometrinen keskipiste ("centroid").

7. Olkoon pallon säde a ja sillä vakiotiheys δ. Porataan keskipisteen läpi lieriömäinen reikä, jonka säde $= b$, $b < a$. Määritä jäljelle jäävän reikäpallon massa ja hitausmomentti porausakselin suhteen.

Momentteja, massakeskipisteitä

Olkoon kappaleen D tiheys paikasta riippuva: $\rho(x,y,z)$. *Momentti* tason $x = x_0$ suhteen:

$$M_{x=x_0} = \int_D (x-x_0)\rho(x,y,z)dV = M_{x=0} - x_0 m,$$

missä m on kappaleen D massa (m:n integraalikaavan osaat kirjoittaa itse).

Vastaavasti määritellään momentit $M_{y=y_0}$ ja $M_{z=z_0}$.

Massakeskipiste on sellainen piste $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, jonka suhteen lasketut momentit $M_{x=x_0}$, $M_{y=y_0}$ ja $M_{z=z_0}$ ovat nollia. Ts. $x_0 = \frac{M_{x=0}}{m}, y_0 = \frac{M_{y=0}}{m}, z_0 = \frac{M_{z=0}}{m}$.

Keskiö, eli geometrinen keskipiste on homogeenisen kappaleen (tiheys=vakio) massakeskipiste. Se siis saadaan asettamalla vaikka $\rho = 1$ yllä.

Kappaleen D *hitausmomentti* akselin L suhteen on

$$I = \int_D r(x,y,z)^2 \rho(x,y,z)dV,$$

missä $r(x,y,z)$ on pisteen (x,y,z) etäisyys akselista L.