Teknillinen korkeakoulu Apiola
Matematiikka

Mat-1.414 Matematiikan peruskurssi V2 kevät 2001
`http://www.math.hut.fi/teaching/v/3/H/`

Laskuharjoitus 1 (viikko 3–4 , 22–26.1)

Harjoitussysteemi:

ke 10–12: AV: Perinteinen, enimmäkseen liitutauluharjoitus
to 10–12: KV: Yhdessä työskentelyä, muutakin kuin ohjelmiston syntaksia.
pe 8-10: LV: Oppilaat esittelevät omia ratkaisujaan, videotykki, liitutaulu, www-sivut, Maple-ws:t ym.

1. viikko (3) **Vain torstaina**, silloin siis neuvontaharjoitus. (Jos halutaan erillistä Maple-opetustilaisuutta, voidaan järjestää.)

Alkuviikko (AV), ke 1.2.

1. Olkoon $z = x + iy$. Sievennä

   a) $\Im(\frac{1}{z})$

   b) $\Im(z^4)$

   c) $\Re(\frac{z}{\bar{z}})$

2. Todista kompleksilukujen tulon nollasääntö:

   $z_1 z_2 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = 0 \vee z_2 = 0$

3. Lausu *De Moivre'n kaavaa* hyödyntäen $\cos 3\Theta$,$\cos 4\Theta$ ja $\sin 5\Theta$ $\cos\Theta$:n ja $\sin\Theta$:n avulla.

4. Ykkösen n:nnet juuret olkoot $w_n^k, k = 0 \ldots n-1$. (Tässä yläindeksi voidaan tulkita joko indeksiksi tai potenssiksi.)

   Olkoon $n \geq 1$ ja $1 \leq k \leq n-1$. Osoita, että

   $$\sum_{j=0}^{n-1} (w_n^k)^j = 0.$$

   Vihje: Geometrinen summa (ei tarvitse kaivaa MAOL:ia, osaathan johtaa).

   Tulkitse myös geometrisesti (kumpihan on "geometrisempaa").

5. Kompleksiluvulla $e^{i\alpha}$ kertominen suorittaa kierron kulman α verran. Tämähän on vanha C1-tuttu olio, tason $\mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, jolla niin ollen on matriisiesitys. Johda kiertokuvauksen matriisiesitys muodostamalla tulo $w = e^{i\alpha} z$, $z = x + iy = re^{i\Theta}$

   Pieni ("vapaaehtoinen") jatko-osa:

   Tästä on helppo yleistää mielivaltaisella kompleksiluvulla $Re^{i\alpha}$ kertomiseen. Miten kuvausta voi sanoin kuvailla ?

6. a) Määritä $\sin i$ ja $\cos i$.

   b) Määritä ne z:n arvot, joilla e^z saa arvot $2, -1, i$, näin tulet laskeneeksi ko. lukujen (eräät tai kaikki) logaritmit.

Loppuviikko (LV), pe 26.1.

Joitakin Maple-viitteitä

`http://www.indiana.edu/~statmath/math/maple/plotting/index.html`
`http://www.math.hut.fi/teaching/k3/maple-pikaopas.html`
`http://www.math.hut.fi/~virranko/mplopas/kansi1.htm`
`http://solmu.math.helsinki.fi/1999/5/apiola/`
`[HAM] Apiola: Symb. ja num. mat. Maple-ohjelmalla Otatieto 588`

Tässä harjoituksessa tarvitaan erityisesti näitä Maple-taitoja:

```
plot, seq, map, subs, with(plots), complexplot, plot3d
kuva1:=xxxplot(...): # Kuvan tallettaminen muuttujaan, muista (:)
kuva2:=xxxplot(...): #  ... siis ei saa lopettaa (;):een (tai kärsit!)
display([kuva1,kuva2]);  # Näin yhdistetään grafiikkoja.

f:=(x,y)-> 2*x+exp(x*y);  # Esimerkki funktiomäärityksestä
```

Funktion ja lausekkeen ero ja käyttö on sitten osattava ja ymmärrettävä vaikka unissaan.

1. Ykkösen n:nsien juurien käsittelyä varten määrittele Maple-funktio

   ```
   w:=(k,n)->exp(I*2*k*Pi/n);
   ```

   Piirrä yksikköympyrä ja kaikki $\sqrt[n]{1}$:t joillakin n:n arvoilla.

   Laadi sitten Maple-skripti, jolla voidaan laskea ja piirtää syötteenä annetun mielivaltaisen kompleksiluvun kaikki n:nnet juuret.

   ```
   > z:=2+3*I : n:=10:   % Muuteltava syöterivi
   > juuret:=seq(w(k,n),k=0..n-1);
   > ? complexplot
   ```

   Huomaa, että $e^{i\Theta}$, $\Theta \in [0, 2\pi)$ "piirtää"yksikköympyrän. `complexplot` on juuri reaalimuuttujan kompleksiplotti.

   Kts. tarkemmin `../L/kompluvut.html` (luentosivuissa).

2. Sivuilla `L/kompluvut.html` ja `L/komplfunkt.html` on esimerkkejä, mm. funktiosta $w = f(z) = z^2$.

   Selvitä ja selosta, miten toimii. Täydennä kuvaa piirtämällä kullekin z-tason käyräparvien rajaamalle alueelle piste ja samanvärinen piste vastaavalle kuva-alueelle w-tasossa. (Alueen vaihtuessa vaihda väriä.) Voit keksiä muitakin tapoja havainnollistaa alueiden kuvautuvuusvastaavuuksia.

   Käsittele sitten samaan tapaan funktiota $w = f(z) = z^3$

3. Tutki eksponenttifunktiota.

   a) Piirrä koordinaattiristikko ja sen kuva. Selvitä, miten mitkäkin viivat (ja alueet) kuvautuvat.

   b) Piirrä 3D-kuva: $|e^z|$, missä värillä ilmaistaan funktion e^z argumentti (arg). (Väri toimii 4:ntenä ulottuvuutena.)

   c) Piirrä $arg(e^z)$, missä värillä ilmaistaan itseisarvo.

   Katso taas mallia `L/kompluv.html ja L/komplfunkt.html` - sivuista.

   Selosta exp-funktion perusominaisuudet kuvien avulla. Muista, että kyseessä on matematiikan tärkein funktio, suhtaudu tehtävään riittävällä arvokkuudella.

4. Lue KRE Exa 3, s. 677 (Joukowski airfoil), siinä tutkitaan kuvausta $f(z) = z + \frac{1}{z}$.

   - Selvitä (kynä/liitu) origokeskisten ympyröiden kuvautuminen.
   - Vaikka emme ole käsitelleet vielä kompleksifunktioiden derivointia, derivoi reaalifunktioista tuttujen sääntöjen mukaan ja totea nollakohdat $(-1, 1)$. Nämä ovat erikoispisteitä, joissa kuvaus ei ole "konforminen".
   - Piirrä joitakin ympyröitä, joiden keskipiste on imaginaariakselilla ja jotka kulkevat pisteiden -1 ja 1 kautta ja piirrä vastaavat kuvajoukot.