Mat-1.374 Matematiikan peruskurssi T 4

9. laskuharjoitukset (viikko 13) Vainikko, Tuomela/Havu

Alkuviikko

1. Osoita, että
$$\mathcal{E}_2(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln|x-y|$$
on kaksiulotteisen Laplacen yhtälön ratkaisu alueessa $\{x \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$.
2. Osoita, että
$$\int_{B(x,\rho)} |\mathcal{E}_2(x,y)|dy < \infty$$
3. Etsi kaikki Laplacen yhtälön ratkaisut alueessa $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, jotka ovat muotoa $v = v(|x|), \quad (n = 2,3)$.
4. Exercise 1.2, n=2 (pruju)
5. Exercise 1.3 (pruju)
6. Olkoon $0 \leq \alpha < n \quad (n = 1,2,3)$. Osoita, että
$$\int_{B(x,\delta)} \frac{dy}{|x-y|^\alpha} \to 0, \quad \text{kun } \delta \to 0.$$

Loppuviikko

1. Olkoon $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$. Ratkaise Neumannin reuna-arvotehtävä
$$\begin{aligned}
\Delta v &= 0 \ (x \in \Omega),\\
\frac{\partial v}{\partial x_1} &= \frac{Q}{b} \ (x_1 = 0),\\
\frac{\partial v}{\partial x_2} &= -\frac{Q}{a} \ (x_2 = 0),\\
\frac{\partial v}{\partial x_1} &= 0 \ (x_1 = a),\\
\frac{\partial v}{\partial x_2} &= 0 \ (x_2 = b).
\end{aligned}$$
Tulkitse tulos lämmönjohtumisen kannalta. Vihje: etsi ratkaisua muodossa $v = c_1[(x_1-a)^2 - (x_2-b)^2] + c_2$.

2. Ratkaise Dirichlet'n reuna-arvotehtävä

$$\Delta v(x) = 1\ (|x| < a),\ v(x) = 0\ (|x| = a),\ n = 2, 3.$$

Vihje: etsi ratkaisua muodossa $v = v(|x|^2)$

3. Olkoon $0 \leq \alpha < n - 1$ $(n = 2, 3)$ ja $x \in \Gamma$, jossa Γ on sileä umpinainen käyrä (n=2) tai pinta (n=3). Osoita, että

$$\int_{\Gamma \cap B(x,\delta)} \frac{1}{|x-y|^\alpha} d\Gamma(y) \to 0,\ \text{kun } \delta \to 0.$$

4. Olkoot α, n ja Γ kuten edellisessä tehtävässä ja $u \in C(\Gamma)$. Osoita, että funktio

$$v(x) = \int_\Gamma \frac{u(y)}{|x-y|^\alpha} d\Gamma(y)$$

on jatkuva $\mathbb{R}^n$:ssä.

5. Exercise 1.5 (pruju)
6. Exercise 1.6 (pruju)