Mat-1.374 Matematiikan peruskurssi T 4

8. laskuharjoitukset (viikko 12)

Aaltosulkujen $\{\ \}$ välissä on lisäkysymyksiä, joita ei tarvitse laskea saadakseen laskaripisteitä, mutta joista voi keskustella assistentin kanssa, jos aikaa jää.

♠:lla merkittyjä tehtäviä ei ole tarkoitettu käsin laskettavaksi.

Alkuviikko

(1) Pruju: tehtävä 4, s. 24. Päteekö $v_k'' \in L^2$?

(2) Pruju: tehtävä 5, s. 24.

(3) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u'(1) + au(1) = 0 \end{cases}$$

Millaisen variaatiotehtävän saat tässä tapauksessa? Muodosta vastaava matriisiyhtälö käyttäen prujussa s. 23 määriteltyjä kantafunktioita ja olkoon $x_k = kh$.

$\Big\{$ Millä a:n arvoilla voit Gershgorinin lauseen avulla päätellä, että diskreetillä tehtävällä on ratkaisu? $\Big\}$

(4) ♠ Ratkaise edellinen tehtävä, kun $a = 1$ ja $f(x) = x$. Vertaa tarkkaan ratkaisuun. Totea, että virhe L^2-normissa on $O(h^2)$. Vihje: olkoon u ratkaisu ja $u_h(x) = \sum c_k v_k(x)$ numeerinen ratkaisu. Selitä miksi

$$\|u - u_h\|_2^2 = \|u\|_2^2 - 2\sum c_k \int_0^1 u(x)v_k(x)dx + \langle c, Mc\rangle \tag{0.1}$$

missä siis M on massamatriisi.

$\Big\{$ Entäpä virhe energianormissa (pruju, s. 23)? Totea, että $\|u - u_h\|_V = O(h)$. Vihje: $\|u_h\|_V^2 = \langle c, Rc\rangle + \langle c, Mc\rangle$. Miksi 'menetetään' yksi h:n potenssi? $\Big\}$

(5) Määritellään funktio

$$\psi_h(x) = \begin{cases} 4x(h-x)/h^2, & 0 \le x \le h \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Olkoon $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$, $h_k = x_k - x_{k-1}$ ja määritellään funktiot $w_k(x) = \psi_{h_k}(x - x_{k-1})$. Olkoon

$$S = \{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n\} \qquad W_h = \operatorname{span}(S)$$

missä v_k:t ovat kuten prujussa s. 23. Näytä, että S on lineaarisesti riippumaton funktiojoukko, joten $\dim(W_h) = 2n$.

(6) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = -1 \end{cases}$$

Olkoon W_h kuten edellisessä tehtävässä. Muotoile diskreetti tehtävä tapauksessa $x_k = kh$. Erityisesti selvitä massa- ja jäykkyysmatriisin rakenne.

Loppuviikko

Loppuviikon harjoitus on siis Maarintalossa seuraavina aikoina:

to 8 – 10   to 14 – 16   pe 8 – 10   pe 12 – 14   pe 14 – 16

Harjoituspisteitten saamiseksi vaaditaan läsnäolo sekä lyhyt (1 A 4), ei käsinkirjoitettu, selostus allaolevien tehtävien ratkaisusta. Selostuksen, joka jätetään viikon 13 kuluessa oman laskuharjoitusryhmän assistentille, voi tehdä joko yksin tai pareittain. Jos tulostus Maarintalossa onnistuu, voi selostukseen liittää pari kuvaa.

Ratkaise seuraavat tehtävät *Mathematicalla*.

(1) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = -1 \end{cases} \tag{0.2}$$

missä $f(x) = 40x$, kun $0 \leq x < 1/4$ ja $f(x) = 4x$, kun $1/4 < x \leq 1$. Tarkan ratkaisun laskeminen ei ihan suoraan onnistu, koska *Mathematica* ei osaa hyvin käsitellä paloittain määriteltyjä funktioita. Seuraavalla tempulla ratkaisu kuitenkin onnistuu.

```
DSolve[{-u1''[x]+u1[x]==40x,u[0]==0,
        -u2''[x]+u2[x]==4x,u2'[1]==-1,
        u1[1/4]==u2[1/4],u1'[1/4]==u2'[1/4]},
        {u1[x],u2[x]},x]
```

Olkoon $h = 1/n$ ja $x_k = hk$; määritellään funktiot v_k kuten prujussa sivulla 23 ja olkoon $V_h = \text{span}(v_1, \ldots, v_n)$. Kantafunktiot saat seuraavan komennon avulla, joka siis vastaa prujun φ-funktiota.

```
fii[e1_,e2_,x_]:=Module[{},
                   Which[x<-e1,0,
                         x<0,1+x/e1,
                         x<e2,1-x/e2,
                         True,0]]
```

Kantafunktiot voidaan sitten muodostaa vaikkapa seuraavasti

```
Do[v[k]=fii[h,h,x-k h],{k,n}]
```

Kannattaa myös määritellä `fun[x_]:=If[x<1/4,40x,4x]`. *Mathematica* ei osaa tarkasti integroida paloittain määriteltyjä funktioita, mutta numeerinen integrointi onnistuu. Numeerisen integroinnin yhteydessä saattaa tulla seuraavanlaisia varoituksia: Numerical integration converging too slowly tai NIntegrate failed to converge to prescribed accuracy. Näistä ei tarvitse välittää.
Muodosta matriisit M ja R, laske 'oikea puoli' b, ja ratkaise saatu yhtälöryhmä $(R+M)c=b$. Määrittele ensin vaikkapa `massa=Table[0,{n},{n}]`, jonka jälkeen lisäät nollasta poikkeavat arvot; R vastaavasti. Esimerkiksi lävistäjä saadaan seuraavasti

```
Do[massa[[k,k]]= 2h/3,{k,n-1}];
 massa[[n,n]]=h/3
```

b:n saadaan puolestaan seuraavasti:

```
b=Table[0,{n}];
Do[b[[k]]= NIntegrate[v[k]fun[x],{x,(k-1)h,(k+1)h}],{k,n-1}];
 b[[n]]= NIntegrate[v[n]fun[x],{x,(n-1)h,1}]
```

Käytä yhtälöryhmän ratkaisemiseen LinearSolvea.
Tutki ensin pisteittäistä suppenemista kohdissa $x=1/4$ ja $x=4/5$. Valitse siis eri h:n arvoja ja testaa päteekö, että virhe $\sim h^\alpha$ jollekin α. Tutki sitten suppenemista L^2-normissa eli laske eri h:n arvoilla $\|u-u_h\|_2 / \|u\|_2$. Mikä on α tässä tapauksessa? Jos vektorissa c on yhtälöryhmän ratkaisu, niin u_h:n saat seuraavasti

```
uh=Sum[c[[k]]v[k],{k,n}]
```

$\|u-u_h\|_2$:n laskeminen nopeutuu, kun käytät kaavaa (0.1).

(2) Sama tehtävä kuin edellä, mutta otetaan epätasavälinen diskretointi. Valitse siis 'pieni' h f:n epäjatkuvuuskohdan ympärillä ja 'suuri' h muualla. Laske virhe L^2-normissa. Vertaa tasavälisen diskretoinnin virheeseen. Vertaa siis sellaisia tapauksia, joissa diskretointipisteitten lukumäärä on sama.

(3) Laajennetaan elementtiavaruutta ottamalla mukaan toisen asteen polynomeja. Seuraava funktio vastaa siis alkuviikon 5. tehtävän ψ:tä.

```
psi[h_,x_]:=Module[{},
            Which[x<0,0,
                  x<h,4x (h-x)/h^2,
                  True,0]]
```

Ratkaise sama tehtävä kuin edellä käyttäen avaruutta W_h tasavälisen diskretoinnin tapauksessa (alkuviikon 5. tehtävä). Tutki suppenemista L^2-normissa. Mikä on α tässä tapauksessa? Kannattaako monimutkaisemman avaruuden käyttöönotto eli saadaanko samalla työmäärällä tarkempi tulos?

(4) Tarkastellaan ominaisarvotehtävää

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = 0 \end{cases}$$

Ominaisarvot ovat $\lambda_n = \pi^2(n + 1/2)^2$. Olkoon tehtävässä 1 saadut massa- ja jäykkyysmatriisi M_1 ja R_1 (tasavälinen diskretointi) ja vastaavasti tehtävässä 3 saadut massa- ja jäykkyysmatriisi M_2 ja R_2. Diskreetiksi ominaisarvotehtäväksi siis tulee $R_i v = \lambda M_i v$, missä $i = 1,\ 2$. Tämähän ei ole standardimuotoa, mutta koska M_i^{-1} on olemassa voidaan määritellä $B_i = M_i^{-1} R_i$, jolloin siis $B_i v = \lambda v$ on standardi tehtävä. Ratkaise molemmissa tapauksissa eri h:n arvoilla ja totea, että kun $i = 1$, niin virhe $\sim h^2$ ja kun $i = 2$, niin virhe $\sim h^4$. Vertaile vain muutamaa pienintä ominaisarvoa, isot ovat joka tapauksessa aika paljon pielessä.

Tehtävälle $Rv = \lambda M v$ on myös kehitetty suoria menetelmiä kahdestakin syystä. Ensinnäkin käänteismatriisin muodostaminen on työlästä, myös tietokoneelle. Toiseksi M^{-1} ja B ovat täysiä, vaikka M ja R ovat harvoja. Tarkista tämä.