Mat-1.374 Matematiikan peruskurssi T 4

7. laskuharjoitukset (viikko 11)

Aaltosulkujen $\{\ \}$ välissä on lisäkysymyksiä, joita ei tarvitse laskea saadakseen laskaripisteitä, mutta joista voi keskustella assistentin kanssa, jos aikaa jää.

♠:lla merkittyjä tehtäviä ei ole tarkoitettu käsin laskettavaksi.

Alkuviikko

(1) Tarkastellaan tehtäviä

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 1, & x \in \Omega \\ u(x,0) = 0 & \\ u(x,t) = 0, & x \in \Gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta v = 1, & x \in \Omega \\ v(x) = 0, & x \in \Gamma \end{cases}$$

missä Ω on (avoin) yksikköpallo $\mathbb{R}^3$:ssa. Selitä miksi fysikaalisten syitten takia varmaankin pätee $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = v(x)$. Osoita sitten, että ainakin $u(x,t) \leq v(x)$. Vihje: $w = v - u$. Laske v. Vihje: symmetrian perusteella voidaan olettaa, että ratkaisu riippuu vain r:stä.

$\{$ Voidaan lisäksi osoittaa, että $u(x,t) \geq (1 - e^{-6t})v(x)$, jonka avulla voidaan siis arvioida, miten nopeasti tasapainotila saavutetaan. $\}$

(2) Z & T: 4.15, s. 353.

(3) ♠ Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1 \\ u(x,0) = x^3 & \\ u(0,t) = 0 & \\ u_x(1,t) + u(1,t) = 0 & \end{cases}$$

Halutaan ratkaisu hetkellä $t = 3$. Diskretoi yhtälö paikan suhteen kuten aaltoyhtälön tapauksessa. Ajan suhteen voit käyttää Euleria, trapetsia tai seuraavaa (BDF2) menetelmää

$$3u^{n+2} - 4u^{n+1} + u^n + 2\beta A u^{n+2} = 0$$

missä siis $\beta = \delta t/h^2$.

(4) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} u_t - a u_{xx} + c u_x = 0, & 0 < x < 1 \\ u(x,0) = f(x) & \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \end{cases}$$

missä $a > 0$ ja $c > 0$. Käytetään Euleria ajan suhteen, joten täysin diskreetti tehtävä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{cases} u^{n+1} = (I - \beta A)u^n \\ u^0 = f_h \end{cases}$$

Diskretoidaan u_{xx} tavalliseen tapaan. Miltä A näyttää, kun u_x:n diskretointiin käytetään seuraavia kaavoja:

(a) $$u_x(jh, n\delta t) \approx (u^n_{j+1} - u^n_{j-1})/(2h)$$

(b) $$u_x(jh, n\delta t) \approx (u^n_j - u^n_{j-1})/h$$

(c) $$u_x(jh, n\delta t) \approx (u^n_{j+1} - u^n_j)/h$$

$\Big\{$ Perustele miksi kaava (b) on fysikaalisesti järkevin. Vihje: tapausta (b) sanotaan upwind-diskretoinniksi. Huomaat, ettei A ole missään tapauksessa symmetrinen. Miten tämän olisi voinut arvata tehtävän fysikaalisen luonteen perusteella? $\Big\}$

(5) Olkoon y ja $z \in \mathbb{R}^2$, $y_2 > 0$, $z_2 > 0$ ja $y_1 \neq z_1$. Ajatellaan, että x_1-akseli on peili. Olkoon y:ssä lamppu; tällöin eräs peilistä heijastuneista valonsäteistä kulkee z:n kautta. Optiikasta tiedämme, että 'tulokulma on heijastuskulma'. Osoita, että tämä seuraa Fermat'n periaatteesta: valo kulkee pisteestä toiseen sellaista polkua pitkin, että kulkuaika on mahdollisimman pieni.

(6) Olkoon $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $C(I)$ kyseisellä välillä määriteltyjen jatkuvien funktioitten joukko ja $V = \{\varphi \in C(I) \mid \varphi(a) = \varphi(b) = 0\}$. Osoita, että jos $f \in C(I)$ ja

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0, \qquad \forall\ \varphi \in V$$

niin $f(x) = 0$ kaikilla $x \in I$.

$\Big\{$ Jos alue on koko reaaliakseli, niin vastaavanlainen lause pätee. Mikä olisi (pienin mahdollinen) V tässä tapauksessa? $\Big\}$

Loppuviikko

(1) Tarkastellaan Dirichlet'n tehtävää

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x) = g, & x \in \Gamma \end{cases}$$

missä Ω on avoin, yhtenäinen ja rajoitettu. *Dirichlet'n periaate* sanoo, että ratkaisu löytyy minimoimalla seuraavaa funktionaalia (eli Dirichlet'n integraalia)

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

Minimiarvoa etsitään siis joukossa $S = \{v \in C^1(\Omega) \mid v(x) = g(x), x \in \Gamma\}$.
$\Big\{$ Perinteisesti funktionaalilla tarkoitetaan kuvausta jostain funktiojoukosta reaali- tai kompleksiluvuille. Hyvin usein funktionaali on lineaarinen ja kyseinen funktiojoukko vektoriavaruus. Totea, että Dirichlet'n integraali ei kuitenkaan ole lineaarinen, eikä S ole vektoriavaruus. $\Big\}$
Määritellään vielä $V = \{\varphi \in C^1(\Omega) \mid \varphi(x) = 0, x \in \Gamma\}$. Osoita, että jos u minimoi J:n, niin

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx = 0 \qquad \forall\ \varphi \in V \tag{0.1}$$

Vihje: olkoon $f(\varepsilon) = J(u + \varepsilon\varphi)$; tällöin f:llä on minimi kun $\varepsilon = 0$.
$\Big\{$ On tapana merkitä $\delta J_u(\varphi) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle dx$. Siis δJ_u on (kiinteällä u) lineaarikuvaus $V \mapsto \mathbb{R}$; toisin sanoen δJ_u on lineaarinen funktionaali. Perinteisesti δJ_u:ta on kutsuttu J:n (ensimmäiseksi) variaatioksi. Itse asiassa variaatio on sama kuin differentiaali. $\Big\}$

(2) Osoita edelleen, että jos (0.1) pätee, niin $\Delta u = 0$. Tarvitset alkuviikon 6. tehtävän moniulotteista versiota.

(3) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -u'' = 1 - x^5, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = -1/4 \end{cases}$$

Tehtävän ratkaisu saadaan minimoimalla lauseketta

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u'|^2 \, dx + \tfrac{1}{4}\, u(1) - \int_0^1 (1 - x^5) u \, dx$$

Olkoon $V_h = \operatorname{span}(x, x^2)$ ja $u_h(x) = c_1 x + c_2 x^2 \in V_h$; valitse c_i:t siten, että $J(u_h)$ on mahdollisimman pieni. Vertaa tarkkaan ratkaisuun. Päteekö $u_h'(1) = -1/4$?

(4) Sama tehtävä variaatioperiaatteella. Olkoon taas $V_h = \operatorname{span}(x, x^2)$ ja $u_h \in V_h$. Etsitään ratkaisua, joka toteuttaa

$$\int_0^1 u_h' v' dx = -\tfrac{1}{4}\, v(1) + \int_0^1 (1 - x^5) v \, dx \qquad \forall v \in V_h$$

Totea, että saadaan samat yhtälöt ja siis sama ratkaisu kuin edellisessä tehtävässä.

(5) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -u'' + u = 1, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u'(1) = -1 \end{cases}$$

Olkoon $h = 1/n$ ja $x_k = kh$; määritellään funktiot v_k kuten prujussa sivulla 23 ja olkoon $V_h = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$. Muodosta diskreetti tehtävä. Ratkaise diskreetti tehtävä tapauksessa $n = 3$, jos lasket käsin, tai jollain isommalla arvolla, jos käytät tietokonetta. Vertaa tarkkaan ratkaisuun.

(6) Tarkastellaan ominaisarvotehtävää

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Olkoon $h = 1/(n + 1)$ ja $x_k = kh$; olkoon funktiot v_k ja vektoriavaruus $V_h = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$ kuten edellisessä tehtävässä. Muodosta diskreetti variaatiotehtävä. Ratkaise diskreetti tehtävä tapauksessa $n = 3$, jos lasket käsin, tai jollain isommalla arvolla, jos käytät tietokonetta. Vertaa saamiasi ominaisarvoja tarkan ratkaisun kolmeen pienimpään ominaisarvoon.