Mat-1.374 Matematiikan peruskurssi T 4

6. laskuharjoitukset (viikko 10)

Aaltosulkujen $\{\ \}$ välissä on lisäkysymyksiä, joita ei tarvitse laskea saadakseen laskaripisteitä, mutta joista voi keskustella assistentin kanssa, jos aikaa jää.

♠:lla merkittyjä tehtäviä ei ole tarkoitettu käsin laskettavaksi.

Alkuviikko

(1) ♠ Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1 \\ u(x,0) = 2\psi(10(x - 7/10)) \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u_t(1,t) + u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

missä $a > 0$ ja ψ kuten viime viikon loppuviikon tehtävässä 4. Halutaan ratkaisu hetkellä $t = 0.6$. Olkoon $h = 1/m$ ja diskretoi itse yhtälö tavalliseen tapaan ja reunaehto kohdassa $x = 1$ seuraavasti

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\delta t} + \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$$

Tässä siis reunamuuttujien u_m^n eliminointi ei onnistu. Täysin diskreetti tehtävä voidaan edelleen kirjoittaa muodossa

$$u^{n+1} = B_1 u^n + B_2 u^{n-1}$$

Miltä näyttävät B_1 ja B_2 ?

$\{$ Otetaan reunaehdoksi $u_t(1,t) + a u_x(1,t) = 0$. Kokeile eri a:n arvoja ja totea, että $a = 1$ absorboi parhaiten. Entä mitä tapahtuu, jos $a < 0$? $\}$

(2) Z & T: 2.7, s. 342. Miten ratkaisu käyttäytyy, kun $t \to \infty$?

(3) Ratkaise Fourier-menetelmällä

$$\begin{cases} u_t - a u_{xx} = 0, & 0 < x < L \\ u(x,0) = f(x) \\ u_x(0,t) = 0 \\ u_x(L,t) + c u(L,t) = cU \end{cases}$$

missä a, c ja U ovat positiivisia vakioita. Miten ratkaisu käyttäytyy, kun $t \to \infty$? Vihje: $w = u - U$. Fysikaalinen tulkinta: sauva on eristetty toisesta päästä ja säteilee lämpöä toisesta ilmaan, joka on vakiolämpötilassa U.

(4) Tarkastellaan lämpöyhtälöä alueessa/kappaleessa Ω. Olkoon q lämpövuo ja u lämpötila kappaleessa. Kappale säteilee lämpöä ympäröivään ilmaan, jonka lämpötila on U. Näytä, että edellisen tehtävän reunaehtoon päädytään, jos oletetaan Fourierin 'laki' $q = -\alpha\nabla u$ ja Newtonin jäähtymislaki $\langle q, n\rangle = \beta(u-U)$. Tarkempi malli jäähtymiselle on Stefanin 'laki' $\langle q, n\rangle = \mu(u^4 - U^4)$. Muotoile tätä vastaava tehtävä.
$\Big\{$ Jos $u - U$ on pieni, niin linearisoimalla Stefan saadaan Newton. Mikä on vakioitten μ ja β välinen yhteys? $\Big\}$

(5) Z & T: 3.9, (b), s. 347.

(6) Z & T: 3.14, s. 348.

Loppuviikko

(1) Ratkaise tehtävä

$$\begin{cases} u_t - a\,u_{xx} = 0, & x > 0 \quad t > 0 \\ u(0,t) = e^{i\omega t}, & t > 0 \\ |u(x,t)| \leq C, & x > 0 \quad t > 0 \end{cases}$$

missä a ja C ovat positiivisia vakioita. Käytä yritettä $u(x,t) = v(x)e^{i\omega t}$.

(2) Voitaisiin ajatella, että maan pintalämpötila vaihtelee jaksollisesti, jaksona sekä vuorokausi että vuosi. Ratkaise maan lämpötilan vaihtelu käyttäen hyväksi edellisen tehtävän ratkaisua. Kumman vaikutus ulottuu syvemmälle, päivittäisen vai vuotuisen vaihtelun? Fourier ratkaisi tämän tehtävän ja huomautti, että ratkaisusta voidaan myös päätellä kuinka syvälle maakellarit pitää kaivaa. Miten?

(3) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} u_t - a(x)u_{xx} + b(x)u_x + c(x)u = 0, & 0 < x < 1 \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = g_1(t) \\ u(1,t) = g_2(t) \end{cases}$$

missä $a(x) > 0$, $c(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $g_1(t) \geq 0$ ja $g_2(t) \geq 0$. Osoita, että $u(x,t) \geq 0$.

(4) Z & T: 4.7, s. 352.

(5) Olkoon u tehtävän

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

ratkaisu. Selitä, miksi fysikaalisten syitten perusteella varmaankin pätee

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

Osoita tämä sitten matemaattisesti.

(6) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = h(x), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial n} + au = g(x), & x \in \Gamma \end{cases}$$

missä Ω on rajoitettu ja $a \geq 0$. Osoita, että tehtävällä on korkeintaan yksi ratkaisu.