Mat-1.374 Matematiikan peruskurssi T 4

5. laskuharjoitukset (viikko 9)

Aaltosulkujen $\{\,\}$ välissä on lisäkysymyksiä, joita ei tarvitse laskea saadakseen laskaripisteitä, mutta joista voi keskustella assistentin kanssa, jos aikaa jää.

♠:lla merkittyjä tehtäviä ei ole tarkoitettu käsin laskettavaksi.

Alkuviikko

(1) Z & T: 7.1, s. 306. Päättele lisäksi, että jos $a > 0$, niin ratkaisu itse asiassa menee nollaan, kun $t \to \infty$.

(2) Z & T: 7.4, s. 307, mutta reunaehtona $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Selitä, miksi tätä sanotaan absorboivaksi reunaehdoksi.

(3) Z & T: 6.2, s. 298. Tapauksessa $n = 1$ saat laskettua ratkaisun kaikkialla. Erityisesti tarkastele miten ratkaisu käyttäytyy pisteen $(x, t) = (0, 1)$ ympäristössä.

(4) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

missä jatkuvat funktiot f ja g ovat nollasta poikkeavia vain rajoitetussa joukossa Ω. Osoita, että $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.

$\Big\{$ Siis u suppenee pisteittäin kohti nollafunktiota. Energia ei kuitenkaan lähesty nollaa. Miten tämä on mahdollista? $\Big\}$

(5) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - \mu_1 u_{xx} = 0, & x < 0 \\ \rho_2 u_{tt} - \mu_2 u_{xx} = 0, & x > 0 \\ \lim_{x\to 0^-} u(x,t) = \lim_{x\to 0^+} u(x,t), & \forall\ t \\ \lim_{x\to 0^-} \mu_1 u_x(x,t) = \lim_{x\to 0^+} \mu_2 u_x(x,t), & \forall\ t \end{cases}$$

missä ρ_i ja μ_i ovat positiivisia vakioita. Olkoon $c_i = \sqrt{\mu_i/\rho_i}$ signaalinopeus ja $z_i = \sqrt{\mu_i \rho_i}$ aaltoimpedanssi. Nimitys tulee siitä, että jos ajatellaan, että x-akseli on sähköjohto ja u jännite, niin $1/\mu_i$ on induktanssi/pituusyksikkö ja ρ_i kapasitanssi/pituusyksikkö. Tällöin z_i:n laaduksi tulee ohmi. Etsitään tasoaaltojen avulla ratkaisua. Valitaan siis vasemmalta tuleva tasoaalto $u_a(x,t) = \exp(i(kx - \omega t))$ alueessa $x < 0$. Laske heijastunut ja taittunut aalto, erityisesti siis heijastus- ja taittumiskertoimet R ja T parametrien c_i ja z_i avulla. Onko mahdollista, että $R = 0$? Tätä kutsutaan impedanssisovitukseksi.

(6) Tarkastellaan yhtälöitä

$$u_{tt} - u_{xx} + au = 0$$
$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0$$

missä $a > 0$. Laske vaihe- ja ryhmänopeudet. Totea, että molemmat yhtälöt ovat dispersiivisiä. Oletetaan, että yhtälöt kuvaavat signaalin kulkeutumista. Perustele dispersioanalyysin avulla, että ensimmäisessä tapauksessa häiriöt kulkevat signaalin jäljessä, ja toisessa tapauksessa signaalin edellä.
$\Big\{$ Pohdi onko signaalinopeus näille yhtälöille äärellinen vai ääretön. $\Big\}$

Loppuviikko

(1) Tarkastellaan seuraavaa tehtävää

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

Muodostetaan puolidiskreetti tehtävä kuten prujussa, kappale 5.1, jolloin siis saadaan

$$u_h'' + \frac{1}{h^2} A u_h = 0 \tag{0.1}$$

Palauta tämä ensimmäisen kertaluvun systeemiksi $z'(t) = Bz(t)$. Mikä yhteys on A:n ja B:n ominaisarvoilla? Päättele, että tehtävän (0.1) ratkaisut ovat värähteleviä, eivätkä ne vaimene kun $t \to \infty$.

(2) Sama tehtävä kuin edellä, mutta käytetään kohdassa $x = 1$ absorboivaa ehtoa $u_t(1,t) + u_x(1,t) = 0$. Valitaan nyt $h = 1/n$ ja diskretoidaan absorboiva ehto kaavalla

$$u_n'(t) + \frac{u_n(t) - u_{n-1}(t)}{h} = 0$$

Liittämällä tämä yhtälö muihin yhtälöihin saadaan jälleen ensimmäisen kertaluvun systeemi $z' = Bz$, missä nyt $B \in \mathbb{R}^{(2n-1)\times(2n-1)}$. Mikä on B? Laske ominaisarvot (numeerisesti) tapauksessa $n = 3$ ja päättele, että reunaehto todellakin on absorboiva, sillä $u_h(t) \to 0$, kun $t \to \infty$. Ominaisarvojen laskeminen ilman Mathematicaa tai Matlabia on työlästä.

(3) Tarkastellaan edelleen puolidiskreettiä tehtävää (0.1) ja määritellään 'puolidiskreetti' energia

$$E_h(t) = \langle u_h'(t), u_h'(t) \rangle + \frac{1}{h^2} \langle u_h(t), Au_h(t) \rangle$$

Osoita, että E_h on vakio. Onko se välttämättä positiivinen?
$\Big\{$ 'Oikea' energia on siis $E(t) = \int_0^1 (u_t^2 + u_x^2)dx$. Osoita, että $E_h(t) \to E(t)$, kun $h \to 0$. $\Big\}$

(4) ♠ Tarkastellaan seuraavaa tehtävää

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1 \\ u(x,0) = 2\psi(10(x - 1/2)) \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

missä

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - 3x^2 + 2x^3, & 0 \le x \le 1 \\ 1 - 3x^2 - 2x^3, & -1 \le x \le 0 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Laske ratkaisu hetkellä $t = 0.3$ prujussa esitetyllä tavalla. Käytä arvoa $\alpha \approx 0.8$.

(5) Tarkastellaan dispersioyhtälöä (pruju, s. 14)

$$\frac{4}{\delta t^2} \sin^2(\omega \delta t/2) = \frac{4}{h^2} \sin^2(kh/2)$$

Laske ryhmänopeus. Valitse kiinteä h ja totea, että suurin mahdollinen aaltoluku (pienin mahdollinen aallonpituus) joka voidaan diskreetissä hilassa esittää on $k = \pi/h$. Näytä, että tälle maksimaalisesti värähtelevälle tasoaallolle ryhmänopeus on nolla.
$\Big\{$ Tulkitse tämä seuraavasti: numeerisen signaalin perään jää nopeasti värähtelevä 'häntä', joka ei mene nollaan kun t kasvaa. $\Big\}$
Kehitä ryhmänopeus sarjaksi

$$\frac{d\,\omega}{d\,k} = 1 - C(\alpha, k)h^2 + O(h^4)$$

missä C siis riippuu α:sta ja k:sta. Vertaa prujussa annettuun vastaavaan vaihenopeuden sarjaan. (Prujussa on virhe: vakion pitäisi olla 24 eikä 12.)

(6) 3. viikon loppuviikon 3. tehtävässä sait toiselle derivaatalle seuraavan 4. kertaluvun differenssioperaattorin

$$\frac{-u(x+2h)+16u(x+h)-30u(x)+16u(x-h)-u(x-2h)}{12h^2}=u''(x)+O(h^4)$$

Ratkaistaan yksiulotteinen aaltoyhtälö siten, että diskretoidaan paikan suhteen 4. kertaluvun operaattorilla ja ajan suhteen 2. kertaluvun operaattorilla tavalliseen tapaan. Laske menetelmän dispersioyhtälö ja sitten tämän avulla stabiilisuusehto. Vastaus: $\alpha \leq \sqrt{3}/2$.

$\Big\{$ Miksei sitten diskretoitaisi myös ajan suhteen 4. kertaluvun operaattorilla? Voidaan osoittaa, että saatava diskreetti tehtävä olisi epästabiili kaikilla α:n arvoilla. $\Big\}$