# Mat-1.374 Matematiikan peruskurssi T 4

4. laskuharjoitukset (viikko 8)

## Alkuviikko

(1) Z & T: 1.3, s. 270.
(2) Z & T: 2.1 ja 2.3, s. 273.
(3) Z & T: 8.4 ja 8.5, s. 316.
(4) Ratkaise Fourier-menetelmällä (muuttujien erotus & sarjat) seuraava tehtävä

$$\begin{cases} u_{tt} + au_t - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < b \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = 0 \\ u_x(b,t) = 0 \end{cases}$$

missä $a > 0$, $b > 0$ ja $c > 0$. Totea, että ratkaisu lähestyy nollaa, kun $t \to \infty$.
(5) Tarkastellaan aaltoyhtälöä $u_{tt} - \Delta u = 0$ $\mathbb{R}^3$:ssa. Kirjoita yhtälö pallokoordinaateissa (Z & T: s. 174) ja etsi ratkaisua joka riippuu vain $r$:stä. Käytä yritettä $u(r,t) = v(r,t)/r$, ja totea, että yleinen ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$u(x,t) = \frac{f(|x|-t)}{|x|} + \frac{g(|x|+t)}{|x|}$$

a) Olkoon $f(y) = 1$, kun $y < 1$, $f(y) = 0$, kun $y > 1$ ja $g(y) = 0$. Valitse useita $t$:n arvoja ja tutki, missä alueissa $u(x,t) \neq 0$. Tulkitse, että $f$ kuvaa 'poispäin menevää' aaltoa (outgoing wave).
b) Olkoon $g(y) = 1$, kun $y > 100$, $g(y) = 0$, kun $y < 100$ ja $f(y) = 0$. Valitse useita $t$:n arvoja ja tutki, missä alueissa $u(x,t) \neq 0$. Tulkitse, että $g$ kuvaa 'tännepäin tulevaa' aaltoa (incoming wave).
(6) Z & T: 7.4, s. 307.

## Loppuviikko

Loppuviikon harjoitus on siis Maarintalossa seuraavina aikoina:

to 12 – 14 to 14 – 16 pe 8 – 10 pe 12 – 14 pe 14 – 16

Harjoituspisteitten saamiseksi vaaditaan läsnäolo sekä lyhyt (1 A 4), ei käsinkirjoitettu, selostus allaolevien tehtävien ratkaisusta. Selostuksen, joka jätetään viikon 9 kuluessa oman laskuharjoitusryhmän assistentille, voi tehdä joko yksin tai pareittain. Jos tulostus Maarintalossa onnistuu, voi selostukseen liittää pari kuvaa.

Ratkaise seuraavat tehtävät *Mathematicalla.*

(1) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -u'' + u = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{0.1}$$

Tällä on siis ominaisfunktiot $u_n(x) = \sin(n\pi x)$ ja ominaisarvot $\lambda_n = \pi^2 n^2 + 1$. Olkoon $f(x) = x(1-x)e^x$; laske $f$:n Fourier-kertoimet $u_n$-kannan suhteen komennon Integrate avulla. *Mathematicalle* ei voi kertoa, että $n$ on kokonaisluku, joten kerrointa kannattaa sieventää seuraavasti:

kerroin=kerroin/. {Cos[n Pi]−>(-1)^n,Sin[n Pi]−>0}

Muodosta osasumma $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} a_n u_n(x)$ (esimerkiksi komennon Sum avulla) jollain pienellä $k$:n arvolla ja vertaa alkuperäiseen funktioon. Muodosta sitten osasumma $u$:lle ($u$:n kertoimet ovat siis $c_n = a_n/\lambda_n$) ja vertaa tarkkaan ratkaisuun. Tarkan ratkaisun saat komennon DSolve avulla.

(2) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -u'' = f(x), & x \in \Omega = (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{0.2}$$

missä $f(x) = x^{-1/3}$. Totea, että $f \in L^2(\Omega)$, joten Fourier-menetelmän pitäisi toimia. Saat $f$:n kertoimet $a_n$ hypergeometrisen funktion avulla (HypergeometricPFQ). Tämä on eräänlainen 'supererikoisfunktio', sillä monet alkeisfunktiot ja muut erikoisfunktiot saadaan erikoistapauksina yleisestä hypergeometrisesta funktiosta.[1] Laske numeerisesti $a_n$ esimerkiksi kun $n = 30$; laske sitten sama kerroin suuremmalla tarkkuudella (N[kerroin,60]). Mitä huomaat? Koska data on pahasti singulaarinen, ei $f$:n osasummat approksimoi kovin hyvin $f$:ä. Totea kuitenkin, että $u$:n osasummat approksimoivat paljon paremmin tarkkaa ratkaisua. Miksi?

(3) Lataa <<LinearAlgebra/MatrixManipulation.m; määrittele sitten jokin vektori ve. Katso minkälainen matriisi tulee komennolla

Reverse[HankelMatrix[Reverse[ve],ve]]]

Tarkastellaan tehtävää (0.1). Muodosta tälle diskreetti tehtävä ja ratkaise se komennon LinearSolve avulla. Piirrä numeerinen ja tarkka ratkaisu samaan kuvaan. Edelliseen tarvitset komentoa ListPlot. Jos $u_i$ on $u(ih)$:n numeerinen approksimaatio, niin pitäisi päteä $\max_i |u(ih) - u_i| \approx ch^2$, missä $c$ on jokin

[1] "There must be many universities to-day where 95 per cent, if not 100 per cent, of the functions studied by physics, engineering, and even mathematics students, are covered by this single symbol $F(a,b;c;x)$." W. W. Sawyer: Perlude to mathematics, Penguin, 1955. $F(a,b;c;x)$ on standardi merkintä klassiselle hypergeometriselle funktiolle. *Mathematicassa* sen symboli on Hypergeometric2F1.

vakio. Valitse eri $h$:n arvoja: $h$, $h/2$, $h/4$,..., ja testaa väitettä. Arvio myös vakio $c$.

(4) Diskretoidaan nyt tehtävä (0.2). Ratkaise kuten edellisessä tehtävässä ja piirrä numeerinen ja tarkka ratkaisu. Huomaat, että virhe $\approx ch^\alpha$, missä $\alpha < 2$. Arvioi $\alpha$.

(5) Tarkastellaan ominaisarvotehtävää

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{0.3}$$

Ominaisarvot ovat $\lambda_n = \pi^2(n + 1/2)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Diskretoi ensin $u'(1) \approx (u(1) - u(1-h))/h$. Laske saamasi matriisin ominaisarvot komennolla Eigenvalues. Vertaa saamiasi ominaisarvoja oikeisiin ominaisarvoihin, etenkin pienimpiä ominaisarvoja. Jos ominaisarvot ovat 'väärässä' järjestyksessä, käytä komentoa Sort. Totea, että virhe on $O(h)$. Siis ominaisarvot saadaan epätarkemmin kuin itse ratkaisu (vertaa tehtävä 3), mikä tuntuu hieman luonnottomalta. Diskretoi reunaehto sitten käyttäen kaavaa

$$u'(1) \approx \frac{1}{2h}\Big(3u(1) - 4u(1-h) + u(1-2h)\Big)$$

Huomaa, että saamasi matriisi ei enää ole symmetrinen. Totea, että virhe on edelleen $O(h)$. 8. harjoituksissa katsotaan, miten elementtimenetelmän avulla saadaan ominaisarvot tarkemmin, eli virhe on $O(h^2)$ sekä ratkaisulle että ominaisarvoille.