Mat-1.374 Matematiikan peruskurssi T 4

3. laskuharjoitukset (viikko 7)

Aaltosulkujen $\{\ \}$ välissä on lisäkysymyksiä, joita ei tarvitse laskea saadakseen laskaripisteitä, mutta joista voi keskustella assistentin kanssa, jos aikaa jää.

♠:lla merkityissä tehtävissä on parasta käyttää Mathematicaa tai Matlabia apuna.

Alkuviikko

(1) Olkoon $z = x_1 + x_2 i$ ja $f(z) = z + 1/z = u(x) + v(x)i$. Cauchy-Riemann-yhtälöitten perusteella u ja v ovat siis harmonisia. Totea suoraan laskemalla, että kummallakaan ei ole paikallisia minimejä/maksimeja. Miten u ja v käyttäytyvät origon lähellä?

(2) Z & T: 5.6, s. 196.

(3) Olkoon u harmoninen rajoitetussa alueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ja oletetaan, että $v(x) = |\nabla u| > 0$ Ω:ssa. Osoita, että myös v saavuttaa maksiminsa Ω:n reunalla.
$\{$ Tulkitaan u virtauspotentiaaliksi, jolloin ∇u on siis vastaava kenttä. Jos pieni hiukkanen kulkee veden mukana, niin sen nopeus kohdassa x on $v(x)$. Yritä kuvitellla tilanne, jossa vesi virtaa nopeasti alueen sisällä ja hitaasti reunalla, ja vertaa tehtävän tulokseen. Huomaa, että reuna ei välttämättä ole 'fysikaalinen' reuna: voidaan ajatella, että virtaus on koko $\mathbb{R}^2$:ssa, ja rajoitutaan vain tarkastelemaan virtauksen käyttäytymistä Ω:ssa. $\}$

(4) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -\Delta u + \langle v, \nabla u \rangle + au = f, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0, & x \in \Gamma \end{cases}$$

missä Ω on rajoitettu alue, $v : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $a > 0$ ja $f \geq 0$. Osoita, että seuraava maksimi/minimiperiaate pätee:

$$0 \leq u(x) \leq \frac{1}{a} \max_{x \in \Omega} f(x)$$

(5) Tarkastellaan tehtävää

$$-\Delta u + au = f, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

missä Ω on rajoitettu, avoin ja yhtenäinen, ja $a > 0$. Osoita, että ratkaisu on yksikäsitteinen, jos reunaehtona on Dirichlet tai Neumann.

(6) Olkoon u harmoninen $\mathbb{R}^3$:ssa, ja oletetaan, että $u \in L^2(\mathbb{R}^3)$ eli $\int_{\mathbb{R}^3} |u|^2 < \infty$. Osoita, että $u = 0$. Vihje: keskiarvoperiaate ja Cauchyn epäyhtälö L^2:ssa.

Loppuviikko

(1) ♠ Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -u'' + u = x^3, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Ratkaise differenssimenetelmällä ja vertaa tarkkaan ratkaisuun.

(2) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 2, \quad u'(1) = 1 \end{cases}$$

Diskretoi Neumann-ehto differenssikaavan $(u(x) - u(x-h))/h = u'(x) + O(h)$ avulla. Minkälaisen diskreetin tehtävän $Au_h = b$ saat? Onko A edelleen symmetrinen? Huomaa, että reunaehdon diskretointi on vain 1. kertalukua vaikka itse yhtälön diskretointi on 2. kertalukua. Diskretoi reunaehto sitten käyttäen kaavaa

$$\frac{1}{2h}\Big(3u(x) - 4u(x-h) + u(x-2h)\Big) = u'(x) + O(h^2)$$

Onko vastaava A symmetrinen?

(3) Halutaan tarkempi differenssioperaattori toiselle derivaatalle. Määritä kertoimet c_i Taylorin sarjan avulla siten, että seuraava kaava pätee

$$\frac{c_1 u(x+2h) + c_2 u(x+h) + c_3 u(x) + c_4 u(x-h) + c_5 u(x-2h)}{h^2} = u''(x) + O(h^4)$$

Diskretoi $-u'' = f$ tämän avulla. Jos unohdetaan reunaehtojen vaikutus, niin mitä Gershgorinin lause sanoo diskreetin tehtävän matriisin ominaisarvojen sijainnista?

(4) ♠ Tarkastellaan ominaisarvotehtävää

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Totea, että (operaattorin $-\frac{d^2}{dx^2}$) ominaisarvot (kyseisillä reunaehdoilla) ovat $\pi^2 n^2$. Diskretoidaan $-u''$ tavalliseen tapaan, jolloin saadaan jokin matriisi A. Vertaa A:n ominaisarvoja $-\frac{d^2}{dx^2}$:n ominaisarvoihin.

(5) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & x \in \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g_1, & x_2 = 1 \\ u = g_2, & x_1 = 0 \text{ tai } x_1 = 1 \text{ tai } x_2 = 0 \end{cases}$$

Käytetään normaaliderivaatalle 1. kertaluvun diskretointia (vertaa tehtävä 2). Selvitä saamasi diskreetin tehtävän $Au_h = b$ matriisin A rakenne. Erityisesti totea, että A on symmetrinen ja positiividefiniitti.

(6) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -u'' + u' + u = f, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Diskretoi ensimmäinen derivaatta esimerkiksi kaavaan $(u(x+h)-u(x-h))/2h = u'(x) + O(h^2)$ avulla. Minkälaisen diskreetin tehtävän $Au_h = b$ saat? Onko A symmetrinen? Voitko päätellä ratkaisun olemassaolon Gershgorinin lauseen avulla?