Mat-1.374 Matematiikan peruskurssi T 4

2. laskuharjoitukset (viikko 6)

Alkuviikko

(1) Olkoon $p(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$; millä a:n, b:n ja c:n arvoilla p on harmoninen? Yleisesti ottaen olkoon $p(x) = \langle x, Ax\rangle$, missä $x \in \mathbb{R}^n$ ja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; mitä ehtoja A:n pitää toteuttaa, jotta p olisi harmoninen?

(2) Osoita, että jos u ja v ovat harmonisia ja $c \in \mathbb{R}$, niin myös $u + v$ ja cu ovat harmonisia (harmoniset funktiot muodostavat siis vektoriavaruuden). Millä ehdolla uv on harmoninen? Anna esimerkki kahdesta harmonisesta funktiosta, joitten tulo on harmoninen.

(3) Olkoon $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ analyyttinen, ja merkitään $z = x_1 + x_2i$, jolloin voidaan kirjoittaa $f(z) = u(x) + i\,v(x)$, missä u ja v ovat harmonisia. Onko uv harmoninen?

(4) Z & T: 9.3, s. 152 ja 2.7 s. 178 (oleellisesti sama tehtävä).

(5) Tarkastellaan seuraavaa ominaisarvotehtävää

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u, & 0 < x < \pi \\ u(0) = 0 \\ u_x(\pi) + u(\pi) = 0 \end{cases}$$

Osoita, että tehtävällä on numeroituva määrä positiivisia ominaisarvoja. Ominaisarvoja ei saa tarkasti, mutta osoita, että

$$(n - 1/2)^2 < \lambda_n < n^2 \qquad \text{ja} \qquad \lambda_n \to (n - 1/2)^2 \quad \text{kun} \quad n \to \infty$$

Päteekö vastaaville ominaisfunktioille ortogonaalisuusehto

$$\int_0^\pi u_i(x)u_k(x)\,dx = 0 \qquad i \neq k$$

(6) Z & T: 1.4, s. 156. Siis λ on operaattorin $-\Delta$ ominaisarvo ja vastaava ratkaisu u_λ on ominaisfunktio. Näytä vielä, että jos λ ja μ ovat kaksi erisuurta ominaisarvoa niin vastaaville ominaisfunktioille pätee

$$\langle u_\lambda, u_\mu\rangle = \int_\Omega u_\lambda u_\mu = 0$$

Siis u_λ ja u_μ ovat ortogonaaleja tämän sisätulon suhteen.

Loppuviikko

(1) Z & T: 7.7 (c), s. 206. Ratkaise myös tehtävä tapauksessa, missä Ω on yksikköympyrän ulkopuolinen alue ja reunaehdon lisäksi on 'äärettömyysehto': u pysyy rajoitettuna, kun $|x| \to \infty$.

(2) Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ au + b\dfrac{\partial u}{\partial n} = g, & x \in \Gamma \end{cases}$$

missä a, $b \in \mathbb{R}$, f ja g annettu ja n on reunan normaali. Mitä ehtoja a:n ja b:n pitää toteuttaa, jotta tehtävän ratkaisu olisi yksikäsitteinen? Olkoon sitten $a = 0$ ja $b = 1$; mitä ehtoja f:n ja g:n pitää toteuttaa, jotta tehtävällä voisi olla ratkaisu? (Tarvitset Greenin kaavoja)

(3) Ratkaise Fourier-menetelmällä

$$\begin{cases} -u'' + u = x, & x \in (0, \pi) \\ u(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

(4) Ratkaise Fourier-menetelmällä

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in (0,1) \times (0,2) \\ u(x_1, 0) = x_1, & \frac{\partial u}{\partial n}(x_1, 2) = 0, \\ u(0, x_2) = \frac{\partial u}{\partial n}(1, x_2) = 0 \end{cases}$$

(5) Ratkaise Fourier-muunnoksen avulla

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \\ u(x_1, 0) = f(x_1) \end{cases}$$

missä $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_2 > 0\}$. Siis muunna ensin x_1:n suhteen. Vastaus on muotoa $u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(s,x) f(s) ds$.

(6) Mitä ehtoja saat f:lle ja u:lle, jotta edellisen tehtävän lasku olisi järkevä? Osoita lisäksi, että reunaehto toteutuu siinä mielessä, että $\lim_{x_2 \to 0} u(x_1, x_2) = f(x_1)$. Vihje: $\int_{-\infty}^{\infty} K(s,x) ds = 1$.