Mat-1.374 Matematiikan peruskurssi T 4

12. laskuharjoitukset (viikko 17) Vainikko, Tuomela/Havu

Alkuviikko

1. Osoita, että integraaliyhtälö
$$u(x) = \int_0^1 e^{-(x+1)y} u(y)dy + f(x) \quad (0 \le x \le 1)$$
on yksikäsitteisesti ratkeava jokaisella $f \in C[0,1]$. Vihje: laske $\|T\|$.
2. Etsi edellisen integraaliyhtälön ratkaisun lineaariapproksimaatio $u_1(x) = c_0 + c_1 x$ kollokaatiomenetelmällä, kun
$$f(x) = e^x + \begin{cases} \frac{1-e^{-x}}{x}, \ 0 < x \le 1 \\ 1, \ x = 0 \end{cases}$$
Huomaa, että f on C^∞-sileä välillä $[0,1]$. Kollokaatiopisteiksi ota vaikka päätepisteet 0 ja 1. Tässä esimerkissä on tarkka ratkaisu $u(x) = e^x$ (tarkista!). Vertaile numeerista ja tarkkaa tuolsta graafisesti.
3. Exercise 3.1
4. Exercise 3.2
5. Exercise 3.7
6. Exercise 3.8

Loppuviikko

1. Etsi funktion $u = e^x$ ortogonaaliprojektio funktioiden $\varphi_0(x) = 1$ ja $\varphi_1(x) = x$ lineaariselle viritelmälle (kaikkia funktioita tarkastellaan välillä $[0,1]$). Vertaile tulosta alkuviikon tehtävässä 2 saatuun approksimaatioon. (Ortogonaaliprojektio on tietyssä mielessä paras approksimaatio, siis oikeastaan vertailet tulosta, jonka sait integraaliyhtälön likimääräisellä ratkaisemisella, tarkan ratkaisun $u = e^x$ parhaaseen lineaariseen approksimaatioon.
2. Umpinainen käyrä (lineakoni) on annettu napakoordinaateissa lausekkeella $r = 3 - 2\cos\theta$. Esitä käyrän 1-periodinen parametrisointi.
3. Exercise 3.11
4. Exercise 3.12
5. Exercise 3.15
6. Exercise 3.17