Mat-1.374 Matematiikan peruskurssi T 4

11. laskuharjoitukset (viikko 16) Vainikko, Tuomela/Havu

Alkuviikko

1. Olkoon $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. Esitä kaksikerrospotentiaalin $\mathcal{W}(x)$ arvot, kun tiheysfunktiona on $u(x) \equiv 1$.
2. Olkoon $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$. Alueessa $|x| > 1$ on annettu yksikerrospotentiaali

$$\mathcal{V}(x) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\left(1 + \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right)$$

   Etsi $\mathcal{V}$:n tiheysfunktio u. Vihje: Prujun propositio 1.4:n mukaan $u(x) = \mathcal{V}'_-(x) - \mathcal{V}'_+$, $x \in \Gamma$.
3. Olkoon $n = 2$. Harmonisen funktion u liittoharmoniseksi funktioksi kutsutaan funktioita v, joka toteuttaa Caucy–Riemannin yhtälöt $\frac{\partial v}{\partial x_1} = -\frac{\partial u}{\partial x_2}$, $\frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}$. Osoita, että v on harmoninen, kun u on harmoninen. Tarkista, että seuraavat funktiot ovat harmonisia ja etsi niiden liittoharmoniset funktiot:

$$a) \quad u = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1$$

$$b) \quad u = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

$$c) \quad y = \ln(x_1^2 + x_2^2)$$

4. Exercise 1.12
5. Exercise 1.11
6. Exercise 1.13

Loppuviikko

1. Exercise 2.11 (vain Neumannin ulkotehtävää koskeva osa; Dirichlet'n sisätehtävää koskeva osa esitetään luennolla).
2. Olkoon $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = a\}$. Oletetaan, että $\int_\Gamma \psi d\Gamma = 0$. Osoita, että Neumannin ulkotehtävän

$$\Delta v(x) = 0 \ (|x| > a), \ \frac{\partial v(x)}{\partial \nu(x)} = \psi(x) \ (|x| = a), \ v(x) \to 0 \ (|x| \to \infty)$$

   ratkaisu on

$$v(x) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \ln|x - y|\psi(y)d\Gamma(y) \ (|x| > a)$$

3. Tehtävän 2 jatko: Laske v numeerisesti pisteissä $(10, 0)$ ja $(0, 1)$, kun $a = 1$, $\psi(x) = x_1^2 - x_2^2$.
4. Approksimoi $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ pisteessä $(1, 0)$, kun v on Dirichlet'n sisätehtävän

$$\Delta v(x) = 0 \; (|x| < 1), \; v(x) = x_1 - x_2^2 \; (|x| = 1)$$

ratkaisu. Vihje: Tehtävän ratkaisun esittää Poissonin kaava.
5. Exercise 2.6
6. Exercise 2.7