Mat-1.374 Matematiikan peruskurssi T 4

10. laskuharjoitukset (viikko 15) Vainikko, Tuomela/Havu

Alkuviikko

1. Olkoon $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$. On annettu yksikerrospotentiaali
$$\mathcal{V}(x) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \text{ kun } |x| > 1.$$
Mikä on $\mathcal{V}$:n lauseke, kun $|x| < 1$?
2. Olkoon $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = a\}$. Laske yksikerrospotentiaali $\mathcal{V}(x),\ x \in \mathbb{R}^2$, kun tiheysfunktio $u(x) \equiv 1$. Vihje: huomaa symmetria: $\mathcal{V}$ on muotoa $\mathcal{V} = \mathcal{V}(|x|)$.
3. Olkoon $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$. Laske yksikerrospotentiaali $\mathcal{V}(x),\ x \in \mathbb{R}^3$, kun tiheysfunktio $u(x) \equiv 1$.
4. Exercise 1.7.
5. Exercise 1.9.
6. Exercise 1.10.

Loppuviikko

1. Ratkaise integraaliyhtälö
$$u(x) = \int_0^1 e^{-(x+y)} u(y)dy + x \quad (0 \le x \le 1).$$
2. Ratkaise integraaliyhtälö
$$u(x) = \frac{1}{3}\int_0^1 (1 + xy)u(y)dy + \sin 2\pi x \quad (0 \le x \le 1).$$
3. Ratkaise integraaliyhtälö
$$u(x) = \int_0^\pi \sum_{j=1}^n \frac{\sin jx \sin jy}{j^2} u(y)dy + x \quad (0 \le x \le \pi).$$
Vihje:
$$\int_0^\pi \sin kx \sin jx dx = \begin{cases} 0, & k \ne j \\ \frac{\pi}{2}, & k = j \end{cases}$$
4. Laske integraalioperaattorin
$$(Tu)(x) = \int_0^1 \mathcal{K}(x,y)u(y)dy \quad (0 \le x \le 1)$$

normi, kun

$$a)\ \mathcal{K}(x,y) = e^{-(x+y)} \quad b)\ \mathcal{K}(x,y) = 1 + xy$$

$$c)\ \mathcal{K}(x,y) = \cos(\pi xy) \quad d)\ \mathcal{K}(x,y) = \begin{cases} x(1-y)\ 0 \le x \le y \le 1 \\ y(1-x)\ 0 \le y \le x \le 1 \end{cases}$$

5. Olkoon v harmoninen, kun $|x| > a,\ n = 2$. Tällöin v:n inversiomuunnos $w = \tilde{v}$ määritellään lausekkeella
$$w(x) = v\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$$
Osoita, että w on harmoninen, kun $0 < |x| < \frac{1}{a}$. Huomaa myös, että v:n toinen inversiomuunnos on v, t.s. $\tilde{\tilde{v}} = v$.
6. Olkoon w harmoninen, kun $|x| < a,\ n = 2$. Osoita, että w:n inversiomuunnoksella $v = \tilde{w}$ on seuraavat ominaisuudet:
$$\exists \lim_{|x|\to\infty} v(x) =: v_\infty$$
$$|v(x) - v_\infty| \le \frac{c}{|x|},\ |\nabla v(x)| \le \frac{c}{|x|^2} \ \left(|x| > \frac{1}{a}\right).$$

Väitöksiä 5 ja 6 käytimme luennolla hyväksi, kun todistimme prujussa sivulla 10 formuloidun lauseen harmonisen, rajoitetun funktion käyttäytymisestä äärettömyydessä ($n = 2$).