Mat-1.313 Matematiikan peruskurssi T 3

1. mikroharjoitukset (viikko 49) Tuomela, Nevanlinna/Havu

Difyhtälöitä voi *Mathematicalla* numeerisesti ratkaista komennolla NDSolve. Ratkaisu annetaan objektin InterpolatingFunction avulla. NDSolvea käytettäessä alkuarvot pitää antaa yhtälöinä samalla tavalla kuin difyhtälöt. Jos halutaan ratkaisu välillä $t \in [a, b]$ niin alkuarvot voi antaa missä tahansa pisteessä $c \in [a, b]$. *Mathematica* ratkaisee tehtävää sitten sopivasti sekä ajassa eteenpäin että taaksepäin. Esimerkiksi voit kokeilla seuraavia komentoja.

```
vas=NDSolve[{x1'[t]==-2x1[t]+5x2[t],
             x2'[t]==-5x1[t]-2x2[t],
             x1[0]==1,x2[0]==2},
             {x1[t],x2[t] },{t,0,3}];
vas={x1[t],x2[t] }/. vas[ [1] ];
ParametricPlot[vas,{t,0,3}]
```

Tarkastellaan yleistä epälineaarista systeemiä $x' = f(x)$, missä $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Jos $f(\bar{x}) = 0$ niin sanotaan että $\bar{x}$ on systeemin *tasapainopiste*. f:n *differentiaali* (eli Jacobin matriisi) $df : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n\times n}$ on matriisi, jonka (i, j) alkio on $\partial f_i/\partial x_j$. Kommennon Outer avulla voi kätevästi laskea df:n; jos esimerkiksi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, niin suoritetaan Outer[D,{f1,f2},{x1,x2}] (funktiota Outer sanotaan ulkotuloksi).

Tarkastellaan tehtävää $x' = f(x)$. Olkoon $\bar{x}$ tasapainopiste ja $z = x - \bar{x}$, jolloin $z' = df(\bar{x})z$ on linearisoitu tehtävä $\bar{x}$:n ympäristössä. Alkuverryttelynä tarkastele skalaaritapausta ja linearisoi $f(x) = \sin(\sin(x))$ tasapainopisteen $\bar{x} = \pi$ ympäristössä. Onko kyseinen tasapainopiste stabiili?

Käytä kaikissa tehtävissä NDSolvea. Valitse alkuarvot tasapainopisteen läheltä hetkellä $t = 0$ ja ratkaise tehtävä sitten sopivalla välillä $[a, b]$ jossa $a < 0 < b$. Kuvia piirrettäessä käytä optiota PlotRange saadaksesi kuvan sopivasti rajoittumaan tasapainopisteen ympäristöön.

1. Tarkastellaan tehtävää $x' = Ax$, missä

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   Piirrä tälle muutamia ratkaisukäyriä ja piirrä lisäksi samaan kuvaan ominaisvektoreitten suuntaiset origon kautta kulkevat suorat. Mikä on tasapainopisteen tyyppi?

2. Tarkastellaan yhtälöä $x' = f(x)$ missä
$$f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_1x_2 \\ 2x_2 - x_1^2 + x_2^2 \end{pmatrix}$$
Laske tasapainopisteet ja luokittele ne. Piirrä sitten joitain ratkaisukäyriä jotta saat käsityksen miten ratkaisu käyttäytyy tasapainopisteitten ympäristössä. Komentojen ListPlot ja Show avulla saat myös tasapainopisteet piirrettyä samaan kuvaan.
3. 2 ulotteista systeemiä sanotaan Hamiltonin systeemiksi jos on olemassa funktio $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ siten että
$$\begin{aligned} x_1' &= \partial H/\partial x_2 \\ x_2' &= -\partial H/\partial x_1 \end{aligned}$$
Hamiltonin systeemeille pätee energian säilymislaki: H:n arvo pysyy vakiona ratkaisukäyrää pitkin. Hamiltonin systeemiin voidaan liittää seuraava gradienttisysteemi: $x' = -\nabla H$. Olkoon $H(x_1, x_2) = x_2^2/2 + x_1^2/2 - x_1^4/4$. Etsi tasapainopisteet ja piirrä samaan kuvaan Hamiltonin systeemin ja vastaavan gradienttisysteemin ratkaisukäyriä tasapainopisteitten ympäristössä.
4. Tarkastellaan systeemiä $x' = f(x)$, missä
$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) \\ x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix}$$
ja $\mu \in \mathbb{R}$. Selvästi origo on tasapainopiste. Laske muutamia ratkaisuja tapauksissa $\mu < 0$, $\mu = 0$ ja $\mu > 0$. Miten tasapainopisteen laatu muuttuu μ:n funktiona? Miten ratkaisut käyttäytyvät origon lähellä eri μ:n arvoilla? Ilmiötä sanotaan Hopfin bifurkaatioksi.