Mat-1.313 Matematiikan peruskurssi T 3

9. laskuharjoitukset (viikko 46) Tuomela, Nevanlinna/Havu

Alkuviikko

(1) Kreyszig, 7. painos, s. 621, kaava 4. Selvästi annettu funktio ja Fourier-muunnos eivät vastaa toisiaan. Mitä vastaavuutta Kreyszig on mahtanut tarkoittaa?

(2) Ratkaise difyhtälö

$$x' = ax - bx^2, \quad x(0) = c$$

missä vakiot a, b ja c ovat positiivisia. Käytä muuttujan vaihtoa $y = 1/x$. Miten ratkaisu käyttäytyy, kun $t \to \infty$? Miten eri parametrin arvot vaikuttavat asiaan?

(3) Reaalinen 2×2 matriisi A määrittelee vektorikentän liittämällä jokaiseen $\mathbb{R}^2$:n pisteeseen $x = (x_1, x_2)$ vektorin Ax alkupisteenään piste x. Hahmottele seuraavien matriisien vektorikentät piirtämällä riittävä määrä vektoreita $\mathbb{R}^2$-tasoon. Hahmottele kuvien perusteella edelleen vastaavan difyhtälön $x' = Ax$ ratkaisukäyriä origon ympäristössä.

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(4) Vektorikenttää f sanotaan gradienttikentäksi (tai joskus konservatiiviseksi kentäksi), jos on olemassa jokin funktio (potentiaalienergia) $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ siten, että $f = \nabla V$. Mitkä seuraavista ovat gradienttikenttiä? Piirrä kuvat ja hahmottele muutamia yhtälöitten $x' = f^i(x)$ ratkaisukäyriä.

$$a)\ f^1(x) = (-x_1^2, -2x_2^2) \quad b)\ f^2(x) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2) \quad c)\ f^3(x) = (x_1, 0)$$

(5) Vektorikenttää f sanotaan keskeiseksi, jos $f(x) = a(x)x$, missä $a : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Olkoon f keskeinen gradienttikenttä ja V sen potentiaalifunktio. Osoita, että V riippuu vain x:n itseisarvosta.

(6) Ratkaise yhtälö $x' = Ax$ alkuehdolla $x(0) = (1,\, 1,\, -1)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{Vast:} \quad x = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{2t} \\ -2e^t + 3e^{2t} \\ 2e^t - 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

Loppuviikko

(1) Kirjoita vakiokertoiminen difyhtälö $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + ... + a_0 x = 0$ ensimmäisen kertaluvun systeemiksi $x' = Ax$. Osoita, että jos λ on A:n ominaisarvo, niin A:n Jordanin muoto sisältää vain yhden sitä vastaavan Jordanin lohkon, eli $m_g(\lambda) = 1$.

(2) Oletetaan että difyhtälöllä $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + ... + a_0 x = 0$ on ainakin ratkaisut $\sin(2t)$, $4t^2e^{2t}$, $-e^{-t}$. Mikä on pienin kokonaisluku $n > 0$, jolla tämä on mahdollista? Mitkä ovat tällöin vakiot $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$?

(3) Tarkastellaan difyhtälöä $x' = Ax$. Onko origo nielu, lähde, satula, keskus vai mikään näistä, kun A valitaan seuraavasti

$$a) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Jos x on alkuehdon $x(0) = a$ toteuttava ratkaisu, niin määritä kussakin kohdassa ne vektorit a, joita vastaavalle ratkaisulle pätee $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

(4) Hae seuraavien funktioiden Laplace-muunnokset: a) $f_1(t) = \sin^2(at)$,

$$b)\ f_2(t) = \begin{cases} a, & 0 < t < c \\ 0, & t > c \end{cases} \qquad c)\ f_3(t) = \begin{cases} at/c & 0 < t < c \\ 0, & t > c \end{cases}$$

missä a ja c ovat vakioita.

(5) Ratkaise seuraava alkuarvotehtävä.

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}; \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(6) Totea, että $x(t) = (e^t, -t)$ ja $y(t) = (t, e^{-t})$ ovat systeemin

$$x'(t) = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1+t & e^t(1-t) \\ -e^{-t}(1+t) & -1+t \end{pmatrix} x(t)$$

ratkaisuja. Muodosta systeemin fundamentaalimatriisi $\Phi(t,s)$ ja etsi alkuehdon $x(0) = (2,\ 1)$ toteuttava ratkaisu.