Mat-1.313 Matematiikan peruskurssi T 3

8. laskuharjoitukset (viikko 45) Tuomela, Nevanlinna/Havu

Aaltosulkujen $\{ \}$ välissä on lisäkysymyksiä, joita ei tarvitse laskea saadakseen laskaripisteitä, mutta joista voi keskustella/laskea assistentin kanssa, jos aikaa jää.

Alkuviikko

(1) (*QR–algoritmi*) Tämän algoritmin ideana on muodostaa jono matriiseja $A = A_1, A_2, \ldots,$ siten, että jono lähestyy yläkolmiomatriisia, jonka lävistäjällä on A:n ominaisarvot. Olkoon siis $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

1) tehdään QR–hajotelma $A = A_1 = Q_1R_1$ ja lasketaan $A_2 = R_1Q_1$.

k) tehdään QR–hajotelma $A_k = Q_kR_k$ ja lasketaan $A_{k+1} = R_kQ_k$.

Näytä, että $\sigma(A) = \sigma(A_k)$ kaikilla k.

$\Big\{$ Matriisia A sanotaan *Hessenberg–matriisiksi*, jos $a_{ij} = 0$, kun $i > j+1$. Osoita, että jos A_k on Hessenberg, niin myös Q_k on Hessenberg ja päättele, että jos A on Hessenberg, niin A_k on Hessenberg kaikilla k. Tämän takia käytännön algoritmit muuntavat ensin annetun matriisin Hessenberg–muotoon ennen QR–algoritmin soveltamista. $\Big\}$

(2) Lataa *Mathematicassa* paketti `<<LinearAlgebra/Orthogonalization.m` . Testaa, miten komento `GramSchmidt` toimii. Tämän avulla voi laskea QR–hajotelman seuraavasti

```
qr[ma_]:=Module[{q,r},
      q=Transpose[GramSchmidt[Transpose[ma] ] ];
      r=Chop[Transpose[q].ma];
      {q,r}]
```

Kokeile tätä. QR–algoritmin voi toteuttaa vaikkapa seuraavasti.

```
qralg[ma_,n_]:=Module[{m,q,r,i,haj},
       m=ma;
       Do[
            haj=qr[N[m] ];q=haj[ [1] ];
            r=haj[ [2] ];m=r.q,{i,n}];
      m]
```

Valitse siis satunnaisia matriiseja, ja testaa QR–algoritmin toimivuutta. Valitse ensin (reaalisia) matriiseja, joitten ominaisarvot ovat reaalisia. Entä jos reaalisella matriisilla on kompleksisia ominaisarvoja? Kuten huomaat, niin algoritmin tuottama matriisijono pysyy reaalisena, joten se ei voi lähestyä yläkolmiomatriisia. Minkälaista matriisia jono lähestyy? Tuloksesta saadaan kuitenkin (melkein) suoraan approksimaatio myös kompleksisille ominaisarvoille. Miten?

(3) Laske e^A ja e^{At} matriiseille

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mitkä ovat a) kohdan tapauksessa matriisin e^{At} ominaisarvot ja -vektorit?

(4) Osoita, että $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$. Näytä tämän avulla, että ei ole olemassa reaalista matriisia A siten, että

$$e^A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Big\{$ Entä löytyisikö kompleksinen matriisi, joka toteuttaisi tämän yhtälön? Totea, että tällainen matriisi ei ainakaan voi olla yksikäsitteinen. $\Big\}$

(5) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Laske A:n reaalinen Jordan-muoto, ja tämän avulla e^A.

(6) Potenssisarjoilla voi määritellä matriisifunktioita, jos matriisin spektraalisäde on pienempi kuin kyseisen sarjan suppenemissäde. Siis jos $\rho(A) < 1$, niin voidaan määritellä

$$\ln(I + A) = A - \tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{1}{3}A^3 - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} A^k$$

Olkoon sitten A ortogonaalinen ja symmetrinen. Osoita, että

$$B = \ln(I + \tfrac{1}{2}A) = \ln(\sqrt{3}/2)\, I + \ln(\sqrt{3})\, A$$

Tarkista vielä, että $e^B = I + \frac{1}{2}A$.

Loppuviikko

(1) Mitkä ovat seuraavien funktioiden Fourier-muunnokset:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad b)\ g(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

b)-kohdassa voit käyttää derivaatan muunnoskaavaa ja a)-kohtaa tai konvoluutiota. Jälkimmäisessä tapauksessa näytä ensin, että $g = f * f$.

(2) Olkoon f Fourier-muuntuva, $g(x) = f(x - a)$ ja $h(x) = f(ax)$. Laske g:n ja h:n Fourier-muunnos.

(3) Etsi funktion $f(x) = a/(x^2 + a^2)$; $a > 0$ Fourier-muunnos. Vihje: residylause.

(4) Ratkaise Fourier-muunnoksen avulla difyhtälö

$$-u''(x) + u(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$\Big\{$ Huomaa, että ratkaisu ei ole yksikäsitteinen. Voidaan kuitenkin osoittaa, että tehtävällä on yksikäsitteinen ratkaisu vektoriavaruudessa $L^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 \, dx < \infty\}$. Fourier-muunnoksen avulla saadaan tämä ratkaisu. $\Big\}$

(5) Päteekö konvoluutiolle seuraava ominaisuus: olipa f mikä tahansa, niin $(f * f)(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$? Osoita oikeaksi tai keksi vastaesimerkki.

(6) Onko mahdollista, että $f * g = 0$ (siis identtisesti nollafunktio), vaikka $f \neq 0$ ja $g \neq 0$? Osoita mahdottomaksi tai keksi funktiot f ja g, joilla on kyseinen ominaisuus.