Mat-1.313 Matematiikan peruskurssi T 3

7. laskuharjoitukset (viikko 44) Tuomela, Nevanlinna/Havu

Alkuviikko

(1) Olkoon $S = \{v^1, v^2, \ldots, v^k\}$ ortonormaali joukko $\mathbb{R}^n$:n vektoreita ja $V = \text{span}(S)$. Määritellään matriisi P seuraavasti

$$P = \sum_{i=1}^{k} v_i \diamond v_i$$

missä siis merkintä $x \diamond y$ tarkoittaa 'ulkotuloa', eli matriisia, jonka alkiot ovat $x_i y_j$. Näytä, että $P^2 = P$ ja $P^t = P$. Totea, että P on siis kohtisuora projektio V:lle. Huomaa, että $(x \diamond y)z = \langle y, z\rangle x$ ja $(x \diamond y)(z \diamond w) = \langle y, z\rangle (x \diamond w)$.

(2) Olkoon $\mathbb{P}$ kaikkien polynomien muodostama vektoriavaruus. Määritellään

$$\langle p, q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)q(x)e^{-x^2}\, dx \quad p,\ q \in \mathbb{P}$$

Totea, että tämä on sisätulo, ja että kaikkien polynomien normi on äärellinen. Ortonormalisoi joukko $\{1, x, x^2\}$ tätä sisätuloa käyttäen. Muistetaan, että $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

(3) Olkoon avaruudessa $L^2[0,1] = \{f : [0,1] \mapsto \mathbb{R} \mid \int_0^1 |f|^2\, dx < \infty\}$ annettu sisätulo $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f\, g\, dx$. Sanotaan, että kuvaus $T : L^2[0,1] \mapsto L^2[0,1]$ on symmetrinen, jos

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, Tg\rangle \quad \forall\ f,\ g \in L^2[0,1]$$

Olkoon $(T\,f)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy$, missä k on jatkuva funktio. Osoita, että $T : L^2[0,1] \mapsto L^2[0,1]$ ja että T on symmetrinen, jos $k(x,y) = k(y,x)$. Osoita vielä, että on olemassa vakio c siten, että

$$\frac{|\langle f, Tf\rangle|}{\langle f, f\rangle} \le c, \quad \forall\ f \in L^2[0,1]$$

(4) Olkoon A $k \times n$-matriisi. Osoita:

$$\|A\|_2 = \max_{|x|_2 = |y|_2 = 1} |\langle y, Ax\rangle|$$
$$\|A\|_2 = \|A^*\|_2$$

(5) a) Olkoon $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ja $c \in \mathbb{K}$ mielivaltaisia. Osoita, että häiriöalttius $\kappa_p(A) \ge 1$ ja $\kappa_p(cA) = \kappa_p(A)$. b) Osoita, että jos A on ortogonaalinen tai unitaarinen, niin $\|A\|_2 = 1$ ja $\kappa_2(A) = 1$.

(6) Tarkastellaan tehtävää $Ax = b$, missä

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0.02 & -0.0003 & 0.005 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Laske $\kappa_1(A)$. Huomaat, että se on varsin iso. Edellisessä tehtävässä todettiin, että koko matriisin skaalaus ei auta asiaa. Sen sijaan rivien/sarakkeitten skaalaus erikseen saattaa hyvinkin parantaa tilannetta. Yleisesti ottaen, jos matriisissa on itseisarvoltaan hyvin eri suuria alkioita, niin siitä voi seurata numeerisia vaikeuksia. Skaalataan siis A:n toinen rivi. Olkoon $D = \mathrm{diag}(1, d, 1)$; muunnetaan siis alkuperäinen tehtävä muotoon $DAx = Db$. Valitse d sopivasti siten, että $\kappa_1(DA)$ on huomattavasti pienempi kuin $\kappa_1(A)$.

Loppuviikko

(1) Olkoon $H_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Hilbertin matriisi, eli $h_{ij} = 1/(i + j - 1)$. Osoita, että on olemassa c siten, että $\rho(H_n) \leq c\ln(n)$ kaikilla n. Tutki sitten numeerisesti esimerkiksi *Matlabilla* tai *Mathematicalla* miten H_n:n pienin ominaisarvo käyttäytyy n:n kasvaessa. Onko H_n on häiriöaltis/erittäin häiriöaltis/ei lainkaan häiriöaltis? Luennoilla todettiin, että H_n on positiividefiniitti, joten ominaisarvojen on oltava positiivisia. Matlabissa on valmiina funktio hilb, joka antaa Hilbertin matriisin. Mathematicassa komento HilbertMatrix saadaan käyttöön lataamalla <<LinearAlgebra/MatrixManipulation.m .

(2) Totea, että Möbiuksen kuvaus $f(z) = (z - 1)/(z + 1)$ kuvaa yksikkökiekon vasemmalle puolitasolle. Osoita sitten, että jos A:n spektri on yksikkökiekossa ja $B = (A + I)^{-1}(A - I)$, niin B:n spektri on vasemmassa puolitasossa.

(3) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 6 & 1 & 1 \\ i/2 & i & 5i & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

Arvioi A:n ominaisarvojen sijaintia laskemalla $\|A\|_1$ ja $\|A\|_\infty$. Tutki sitten ominaisarvojen sijaintia Gershgorinin ympyröitten avulla. Totea vielä, että jos $S = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 4)$, niin similaarimuunnoksen SAS^{-1} avulla nähdään, että A:lla on ominaisarvo kiekossa $|z + 2| \leq 1/2$.

(4) Laske potenssimenetelmällä arvio A:n suurimmalle ominaisarvolle ja vastaavalle ominaisvektorille, kun

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Päättele Gershgorinin ympyröitten avulla, että iteraatio suppenee varsin nopeasti.

(5) Ratkaise yhtälöryhmä $Ax = b$, missä $b = (2, -1, 1, 1)$ ja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

pienimmän neliösumman mielessä QR–hajotelman avulla. Mikä on b:n ortogonaaliprojektio $R(A)$:lle?

(6) Tarkastellaan tehtävää $Ax = b$, missä $b = (2, -1, 3)$ ja

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ -1 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Olkoon $D = \mathrm{diag}(6, 7, 9)$ ja $N = A - D$. Ratkaise tehtävä iteratiivisesti *Jacobin* menetelmällä: $x^{n+1} = D^{-1}Nx^n + D^{-1}b$. Näytä ensin, että menetelmä suppenee.