Mat-1.313 Matematiikan peruskurssi T 3

6. laskuharjoitukset (viikko 43) Tuomela, Nevanlinna/Havu

Alkuviikko

(1) Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonaalinen, $E = \{e^1, \ldots, e^n\}$ luonnollinen kanta ja $B = \{b^1, \ldots, b^n\}$ toinen kanta, missä $b^i = Ae^i$. Merkitään koordinaatteja kannassa E x:llä ja koordinaatteja kannassa B y:llä. Totea, että $y = A^t x$. Olkoon $u : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ja

$$[\nabla u]_E = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) \qquad [\nabla u]_B = \Big(\frac{\partial u}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial y_n}\Big)$$

Osoita, että $[\nabla u]_B = A^t[\nabla u]_E$. Tulkitse tulos seuraavasti: gradientti on sama kaikissa suorakulmaisissa koordinaateissa. Vertaa napa- ja pallokoordinaatteihin.

(2) Laske matriisien

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b) \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit. Mitkä ovat algebralliset ja geometriset kertaluvut?

(3) Olkoon $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sen ominaisarvot. Mitkä ovat matriisien A^k, $k \in \mathbb{Z}$ ja $A + dI$ ominaisarvot? Osoita, että

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{ja} \quad \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

Päättele tästä, että jos A ja B ovat similaarisia, niin $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ ja $\det(A) = \det(B)$.

(4) Osoita, että vinosymmetrisen matriisin spektri on puhtaasti imaginaarinen, ja että unitaaristen ja ortogonaalisten matriisien ominaisarvot sijaitsevat yksikkökehällä.

(5) Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *normaali*, eli $AA^t = A^tA$. Olkoon λ jokin A:n ominaisarvo ja v vastaava ominaisvektori. Osoita, että $A^tv = \bar{\lambda}v$. Näytä sitten tämän avulla, että normaalin matriisin erisuuriin ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat ortogonaalisia.

(6) Osoita, että jos matriisin A kaikki ominaisarvot ovat nollia, niin se on nilpotentti, eli on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että $A^k = 0$. Anna esimerkki matriisista $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $(n > 2)$ jolle pätee: $A^{n-1} \neq 0$ ja $A^n = 0$.

Loppuviikko

(1) Olkoon $V = C^\infty(\mathbb{R})$; määritä lineaarikuvausten

$$D : V \to V \qquad (D\, f)(x) = f'(x)$$
$$J : V \to V \qquad (J\, f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

ominaisarvot ja -vektorit.

(2) Määritellään joukot

$$J_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x|_p \le 1 \right\}$$

missä $0 < p \le \infty$. Piirrä kuva tapauksista $p = 1/3,\, 1,\, 2,\, 4,\, \infty$. Osoita, että $|x|_{1/3}$ *ei* määrittele normia, etsimällä x ja y siten, että $|x+y|_{1/3} > |x|_{1/3} + |y|_{1/3}$. Päättele kuvien perusteella, että J_p on konveksi, kun $1 \le p \le \infty$. Osoita, että jos J_p on konveksi, niin kolmioepäyhtälö pätee.
Joukko S on *konveksi*, jos pätee: $x,\, y \in S \Rightarrow (1-t)x + ty \in S$ kaikilla $0 \le t \le 1$.

(3) Olkoot p ja q reaalikertoimisen polynomiavaruuden $\mathbb{P}_2$ polynomeja. Osoita, että $\langle p,\, q\rangle = p(0)q(0) + p(1/2)q(1/2) + p(1)q(1)$ on sisätulo $\mathbb{P}_2$:ssa. Laske $\|p\|$, kun $p = 1$ tai $p = x$. Avaruudessa $C[0,1]$ määritellään samoin $\langle f,\, g\rangle = f(0)g(0) + f(1/2)g(1/2) + f(1)g(1)$. Onko tämä sisätulo?

(4) Ortonormeeraa avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta $\{a^1,\, a^2,\, a^3\}$ Gramin-Schmidtin ortonormeerausprosessilla, kun $a^1 = (1,2,2)$, $a^2 = (1,2,-2)$, $a^3 = (1,-2,-2)$.

(5) Olkoon $L^2[0,1] = \{f : [0,1] \mapsto \mathbb{R} \mid \int_0^1 |f|^2\, dx < \infty\}$. Tämä on siis sisätuloavaruus, jossa sisätulona on $\langle f,\, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$. Olkoon $S \subset L^2[0,\, 1]$ aliavaruus $S = \operatorname{span}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, missä

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1-2x, & 0 \le x \le 1/2 \\ 0, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases} \qquad \varphi_2(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2 \\ 2-2x, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 1/2 \\ 2x-1, & 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$

a) Mikä on funktion $h(x) = x^3$ ortogonaaliprojektio aliavaruuteen S? b) Määrää $\min_{f\in S} \|h - f\|$. Piirrä kuva.

(6) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Laske $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ ja $\|A\|_\infty$. Mitä voit päätellä ominaisarvojen sijainnista?