Mat-1.313 Matematiikan peruskurssi T 3

5. laskuharjoitukset (viikko 42) Tuomela, Nevanlinna/Havu

Alkuviikko

1. Olkoon V kuvausten $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ muodostama vektoriavaruus. Mitkä seuraavista joukoista ovat V:n aliavaruuksia?

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{f \in V \mid f(1) = 0\} \\
S_2 &= \{f \in V \mid f(0) = i\} \\
S_3 &= \{f \in V \mid f(-x) = \overline{f(x)}\} \\
S_4 &= \{f \in V \mid f(x) = c_1 + c_2 e^{ix},\ c_i \in \mathbb{R}\} \\
S_5 &= \{f \in V \mid f(x) = c_1 + c_2 e^{ix},\ c_i \in \mathbb{C}\}
\end{aligned}
$$

Riippuvatko vastaukset siitä, onko V reaali- vai kompleksikertoiminen vektoriavaruus?

2. Olkoon $V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = v^0 + c_1 v^1 + c_2 v^2,\ c_i \in \mathbb{R}\}$, missä $v^0 = (-4, 4, -1)$, $v^1 = (1, 2, 1)$ ja $v^2 = (-3, 2, -1)$. Onko V $\mathbb{R}^3$:n aliavaruus?

3. Olkoot V_1 ja V_2 aliavaruuksia. Osoita, että myös $V_1 \cap V_2$ on aliavaruus. Olkoon $x \in V_1 \setminus V_2$, $y \in V_2 \setminus V_1$ ja $z \in V_1 \cap V_2$, $z \neq 0$. Osoita, että $\{x, y, z\}$ on lineaarisesti riippumaton joukko.

4. Täydennä joukko $\{x + 3, x^2 + x\}$ $\mathbb{P}_3$:n kannaksi. Olkoon

$$V = \operatorname{span}(x^2 + x, x^3 + 3x, x^3 + x^2, x + 1, x^2 + 3x + 1, x^3 + 2x + 1) \subset \mathbb{P}_3$$

Etsi jokin V:n kanta. Onko se myös $\mathbb{P}_3$:n kanta?

5. Olkoon $\{b^1, \ldots, b^n\}$ lineaarisesti riippumaton ja määritellään $v^k = b^k + b^{k+1}$, $1 \leq k < n$ ja $v^n = b^n + b^1$. Onko joukko $\{v^1, \ldots, v^n\}$ lineaarisesti riippumaton? Mikä on $\dim(\operatorname{span}(v^1, \ldots, v^n))$?

6. Olkoon B n-ulotteisen reaalikertoimisen vektoriavaruuden V kanta, $S = \{v^1, \ldots, v^r\}$ joukko V:n vektoreita ja $K = \{[v^1]_B, \ldots, [v^r]_B\}$ vastaavat koordinaattivektorit $\mathbb{R}^n$:ssä. Osoita:

$$S \text{ lineaarisesti riippumaton} \iff K \text{ lineaarisesti riippumaton}$$

Loppuviikko

1. Olkoon $C[0,1] = \{f : [0,1] \mapsto \mathbb{R} \,|\, f \text{ jatkuva}\}$. Osoita, että $C[0,1]$ on ääretönulotteinen vektoriavaruus.

2. Ovatko seuraavat lineaarikuvauksia?

$$
\begin{aligned}
T &: \mathbb{R}^{2\times 2} \mapsto \mathbb{R}^{2\times 3}, \quad T(A) = AB, \text{missä } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \\
T &: \mathbb{R}^{n\times n} \mapsto \mathbb{R}, \qquad T(A) = \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \\
T &: \mathbb{P}_2 \mapsto \mathbb{P}_4, \qquad (T\,p)(x) = x^3 p'(x)
\end{aligned}
$$

Määrää lisäksi $N(T)$, $R(T)$, $\nu(T)$ ja $r(T)$.

3. Tässä ja seuraavassa tehtävässä $\mathbb{C}^2$:a tarkastellaan kompleksikertoimisena vektoriavaruutena. Määritellään kuvaus $f : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{R}^4$ seuraavasti:

$$f(z) = f(z_1, z_2) = (\Re(z_1), \Re(z_2), \Im(z_1), \Im(z_2))$$

Näytä, että f on bijektio. Onko f lineaarinen?

4. Olkoon f kuten edellisessä tehtävässä ja määritellään $T : \mathbb{C}^{2\times 2} \mapsto \mathbb{R}^{4\times 4}$ yhtälöllä $T(A) = f \circ A \circ f^{-1}$ ja olkoon

$$V = \{B \in \mathbb{R}^{4\times 4} \,|\, B = T(A),\ A \in \mathbb{C}^{2\times 2}\}$$

Näytä T on injektioksi, V $\mathbb{R}^{4\times 4}$:n aliavaruudeksi ja laske $\dim(V)$. Olkoon sitten $S(B) = f^{-1} \circ B \circ f$; tämä luonnollisesti määrittelee jonkin kuvauksen $\mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2$. Etsi jokin matriisi $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ siten, että $S(B)$ *ei* ole lineaarikuvaus.

5. Olkoon $C^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \,|\, f \text{ ja kaikki } f\text{:n derivaatat jatkuvia}\}$ ja määritellään $T : C^\infty(\mathbb{R}) \mapsto C^\infty(\mathbb{R})$ yhtälöllä $(Tf)(x) = f'(x) + f(3)$. Osoita, että T on lineaarikuvaus. Mikä on $N(T)$?

6. Määritellään lineaarikuvaukset $D : \mathbb{P}_n \mapsto \mathbb{P}_{n-1}$ ja $J : \mathbb{P}_{n-1} \mapsto \mathbb{P}_n$ yhtälöillä $(Dp)(x) = p'(x)$ ja $(Jp)(x) = \int_0^x p(t)dt$. Etsi kuvausten matriisit kannassa $\{1, x, x^2, \ldots\}$. Määritä $N(D)$ ja $N(J)$.