Mat-1.313 Matematiikan peruskurssi T3 s-96 **Tuomela, Nevanlinna/Havu**

Harjoitus 4, alkuviikko

1. Laske seuraava integraali, kun C on mielivaltainen yksinkertainen suljettu käyrä, joka kiertää kaikki integrandin singulariteetit vastapäivään:

$$\oint_C \frac{z \cosh \pi z}{z^4 + 13z^2 + 36}\, dz.$$

V:$4\pi i/5$

2. Laske seuraavat integraalit, kun C on yksikköympyrän kehä vastapäivään kierrettynä:

$$a) \quad \oint_C \frac{7z}{z^2 + 1/9}\, dz \qquad\qquad b) \quad \oint_C \frac{\tan \pi z}{z^3}\, dz$$

V: b) 0.

3. Laske

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{37 - 12\cos\theta}.$$

V: $2\pi/35$.

4. Laske

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 - 2x + 2)^2}\, dx.$$

V:$\pi/2$.

5. a) Miksi käyrien $|z|$ =vakio ja $\arg z$ =vakio kuvat leikkaavat kohtisuorasti, kun kuvauksen määrittelee analyyttinen funktio? b) Säilyttääkö kuvaus $w = \bar{z} = x - iy$ kulmien suuruudet ja suunnistukset?

6. Olkoon $f(z)$ analyyttinen pisteessä z_0. Oletetaan, että $f'(z_0) = 0, ..., f^{(k-1)}(z_0) = 0$, mutta $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Tällöin kuvaus $w = f(z)$ suurentaa kulmia joiden kärki on pisteessä z_0 tekijällä k. Keksi esimerkit tapauksista $k = 2,\ 3,\ 4$ ja totea, että edellä kerrottu pitää paikkansa.

Harjoitus 4, loppuviikko

1. Hae seuraavien kuvauksien kiintopisteet:
a) $w = (2iz - 1)/(z + 2i)$, b) $w = (3z + 2)/(z - 1)$. V: a) $\pm i$.

2. Hae Möbius-kuvaus, joka kuvaa pisteet $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ pisteille $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ (tässä järjestyksessä), kun
a) $Z = \{-1, 0, 1\}$, $W = \{0, 1, -1\}$,
b) $Z = \{i, 0, -i/2\}$, $W = \{\infty, i, 0\}$. V: a) $w = (z + 1)/(-3z + 1)$.

3. Laske ja piirrä seuraavien alueiden kuvat, kun niihin operoidaan funktiolla $w = \sin z$:
a) $0 < x < 2\pi$, $1 < y < 2$ b) $-\pi/4 < x < \pi/4$, $0 < y < 3$.

4. Maksimiperiaate sanoo, että yhdesti yhtenäisessä, rajoitetussa alueessa harmoninen funktio $\Phi(x, y)$ ($\neq$ vakio!) saavuttaa ääriarvonsa alueen reunalla. Totea, että tämä pätee funktiolle $\Phi(x, y) = xy$ kiekossa $x^2 + y^2 \leq 8$. Hae Φ:n ääriarvot ko. kiekossa.

5. Gammafunktio määritellään oikeassa puolitasossa integraalina

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

Totea, että $\Gamma(1) = 1$ ja osoita, että gammafunktio toteuttaa yhtälön $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ ja on analyyttinen, kun Re $z > 0$. Gammafunktio voidaan myös jatkaa analyyttisesti koko kompleksitasoon meromorfiseksi funktioksi, jolla on yksinkertaiset navat pisteissä $0, -1, -2, \ldots$

6. Tarkastellaan *Joukowski-kuvausta*

$$z = w + \frac{1}{w} \hookleftarrow w$$

Tutki pisteen $w = 1$ kautta kulkevien ympyröiden kuvautumista ja pyri näin konstruoimaan siipiprofiili, jonka pohjalta rakennetun lentovälineen kyytiin saattaisit uskaltautua.