Mat-1.313 Matematiikan peruskurssi T3 s-96 **Tuomela, Nevanlinna/Havu**
Harjoitus 3, alkuviikko

1. Osoita, että sarja $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ suppenee itseisesti jos ja vain jos itseisarvojen osasummat muodostavat rajoitetun jonon.

2. Hae funktion

$$f(z) = \frac{1 + z - \sin(z+1)}{(z+1)^3}$$

Taylor-sarja pisteen $z = -1$ ympäristössä ja määritä suppenemissäde. V:$f(z) = 1/3! - (z+1)^2/5! + (z+1)^4/7! - \ldots, \quad R = \infty$.

3. MacLaurin-sarja

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = E_0 - \frac{E_2}{2!}z^2 + \frac{E_4}{4!}z^4 - \ldots$$

määrittelee *Eulerin luvut* E_{2n}. Osoita, että $E_0 = 1$, $E_2 = -1$, $E_4 = 5$ ja $E_6 = -61$.

4. Näytä kehittämällä $1/\sqrt{1-z^2}$ sarjaksi ja integroimalla termeittäin, että

$$\sin^{-1} z = z + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{z^3}{3} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)\frac{z^5}{5} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)\frac{z^7}{7} \ldots \quad (|z| < 1).$$

Funktion $\sin^{-1}(z) = w = u + iv$ päähaara on määritelmän mukaan se luvuista w, jolle $-\pi/2 \le u \le \pi/2$, kun $v \ge 0$, ja $-\pi/2 < u < \pi/2$, kun $v < 0$.

5. Näytä, että seuraavat sarjat suppenevat tasaisesti annetuissa alueissa

$$\begin{array}{ll} a) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 \cosh n|z|}, \quad |z| \le 1 \\ b) & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{|z|^{2n}+2}, \quad 2 \le |z| \le 3. \end{array}$$

6. Kehitä seuraavat funktiot Laurent-sarjoiksi, jotka suppenevat alueella $0 < |z| < R$ ja määritä suppenemissäteet

$$a)\ f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)} \qquad b)\ f(z) = z \cos\frac{1}{z}.$$

V: a) $\sum_0^{\infty} (-1)^n z^{2n-1}$ b) $\sum_0^{\infty} (-1)^n z^{1-2n}/(2n)!$

Harjoitus 3, loppuviikko

1. Hae osamurtokehitelmän avulla funktion

$$f(z) = \frac{3z^2 - 6z + 2}{z^3 - 3z^2 + 2z}$$

Laurent-sarja alueessa a) $0 < |z| < 1$ b) $1 < |z| < 2$

2. Oletetaan, että f on kokonainen ja että kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee $|f(z)| \leq e^{\tau r}$, missä $r = |z|$. a) Arvioi f:n Taylor-kertoimien itseisarvo $|c_k|$ niin tarkasti kuin mahdollista. b) Vertaa tulosta funktion $e^{\tau z}$ Taylor-kertoimiin. c) Mitä voit päätellä tämän pohjalta kertomafunktion $k!$ kasvunopeudesta?

3. Määritä seuravien funktioiden singulariteetit (sijainti ja tyyppi), ja napojen tapauksessa myös kertaluku a) $\sin^2 z/z^4$ b) $ze^{1/(z-1)}$.

4. Määritä seuraavien funktioiden nollakohtien sijainnit ja kertaluvut a) $z \sin^2 \pi z$
b) $e^z - e^{2z}$ V: a) 0 (kolminkertainen), ± 1, ± 2, ... (kaksinkertaisia).

5. Jos kompleksitason reaaliakselin kuva muodostaa Riemannin pallolle meridiaanit $0°$ ja $180°$, niin hahmottele seuraavien kompleksitason alueiden kuvat Riemannin pallolla
a) ensimmäinen kvadrantti b) $1/2 \leq |z| \leq 2$.

6. Laske seuraavat integraalit, kun C on yksikköympyrän kehä vastapäivään kierrettynä
a) $\oint_C \cot z \, dz$ b) $\oint_C \tanh(z+1)/(e^z \sin z) \, dz$. V: a) $2\pi i$