Mat-1.313 Matematiikan peruskurssi T3 s-96 **Tuomela, Nevanlinna/Havu**

Harjoitus 2, alkuviikko

1. Merkitään

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathcal{W} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

a) Laske $\mathcal{Z} + \mathcal{W}$, $\mathcal{Z}\mathcal{W}$ ja $\mathcal{W}\mathcal{Z}$ ja vertaa näitä $\mathbb{C}$:n operaatioihin $z + w$, zw ja wz, missä $z = x + iy$ ja $w = u + iv$.

b) Laske myös $\mathcal{Z}^{-1}$ ja vertaa sitä lukuun $1/z$.

c) Etsi myös $\mathcal{Z}$:n polaarihajotelma eli esitys $\mathcal{Z} = RQ$, missä R on positiividefiniitti ja Q ortogonaalinen tason kiertomatriisi.

2. Laske $\int_C z^3\,dz$ kun C on oikeassa puolitasossa sijaitseva puoliympyrä $|z| = 2$ pisteestä $-2i$ pisteeseen $2i$ a) parametrisoimalla C, b) käyttämällä integraalifunktiota. V:0.

3. Laske integraali $\int_C |z|\,dz$ pisteestä $A = -i$ pisteeseen $B = i$ pitkin a) janaa AB, b) pitkin vasemmassa puolitasossa sijaitsevaa yksikköympyrän kaarta, c) pitkin oikeassa puolitasossa sijaitsevaa yksikköympyrän kaarta. V:i, $2i$, $2i$.

4. Integroi $f(z)$ vastapäivään yksikköympyrän kehän yli ja kerro onko Cauchyn lause sovellettavissa, kun a) $f(z) = 1/(2z - 5)$, b) $f(z) = \bar{z}^2$.

5. Laske osamurtokehitelmän avulla

$$\oint_C \frac{dz}{1 + z^3},$$

kun C on ympyrän $|z + 1| = 1$ kehä vastapäivään kuljettuna.

6. Laske

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sin z}{(z - 1)(z + 1)} dz$$

kun C on ympyrä $|z| = 2$ kierrettynä vastapäivään. Vihje: Käytä ensin osamurtokehitelmää ja sitten Cauchyn integraalikaavaa.

Harjoitus 2, loppuviikko

1. Integroi $f(z) = [\mathrm{Ln}(z + 1)]/(z^2 + 1)$ pitkin sen alueen reunaa, joka saadaan, kun kolmiosta, jonka kärjet ovat $1 - i/2$, $-1 - i/2$ ja $2i$ (vastapäivään) leikataan pois ympyrä $|z| = 1/4$ (myötäpäivään).

2. Näytä, että

$$\oint_C (z - z_1)^{-1}(z - z_2)^{-1}\,dz = 0,$$

jos C on yksinkertainen suljettu käyrä, ja z_1 ja z_2 mitä tahansa pisteitä, jotka jäävät käyrän C sisäpuolelle.

3. Integroi $f(z)$ pitkin annettua ympyrän kehää C vastapäivään:

$$\begin{aligned} a)\ f(z) &= z^n/(z+1)^{n+1}, \quad C: |z| = 2 \qquad V: 2\pi i \\ b)\ f(z) &= (z-4)^{-3}\mathrm{Ln} z, \quad C: |z-5| = 3. \end{aligned}$$

4. Jos $f(z)$ ei ole vakio, mutta on analyyttinen kaikilla muuttujan z (äärellisillä) arvoilla, ja R ja M ovat mv. positiivisia reaalilukuja, osoita, että muuttujalla z on olemassa arvoja, joilla pätee $|z| > R$ ja $|f(z)| > M$. Vihje: käytä Liouvillen lausetta.

5. Hae seuraavien sarjojen suppenemissäteet i) käyttäen sopivaa testiä ja ii) derivoimalla tai integroimalla sopivaa sarjaa

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{z}{\pi}\right)^{2n+1} \qquad b) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{m} z^n$$

6. Näytä, että

$$(1-z)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$

a) Cauchy-tulon avulla, b) derivoimalla jotain sopivaa sarjaa.