Mat-1.313 Matematiikan peruskurssi T3 s-96 **Tuomela, Nevanlinna/Havu**

Harjoitus 1, alkuviikko

1. Aloitamme kurssin kohottamalla Suomen lipun toiseen potenssiin. Olkoon siis Ω ristin muotoinen kompleksitason osajoukko, jonka kärkipisteet ovat i, $1+i$, $1+2i$, $3+2i$, $3+i$, $5+i$, $5-i$, $3-i$, $3-2i$, $1-2i$, $1-i$ ja $-i$. Tutki, miten funktio $w = z^2$ kuvaa joukon Ω kärkipisteet ja hahmottele koko joukon Ω kuva.

2. Näytä, että $f(z) = |z|^2$ on differentioituva ainoastaan pisteessä $z = 0$, eikä siis ole missään analyyttinen. Vihje: käytä relaatiota $|z+\Delta z|^2 = (z+\Delta z)(\bar{z}+\overline{\Delta z})$.

3. Ovatko seuraavat funktiot analyyttisia? a) $f(z) = \mathrm{Re}(z^2)$, b) $f(z) = 1/(1-z)$, c) $f(z) = z^2 - \bar{z}^2$.

4. Ovatko seuraavat funktiot harmonisia? Myönteisessä tapauksessa hae vastaava analyyttinen funktio $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. a) $u = x/(x^2+y^2)$, b) $u = x^3 - 3xy^2$, c) $v = \ln|z|$.

5. Laske muodossa $a+ib$ a) $e^{\sqrt{2}-i/2}$, b) $\cos(\pi+\pi i)$, c) $\cosh(3+2i)$.

6. Osoita oikeiksi kaavat $(z = x+iy)$

$$\begin{aligned}\cosh z &= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y\\ \sinh z &= \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y\end{aligned}$$

Harjoitus 1, loppuviikko

1. Osoita, että kaavat

$$\begin{aligned}\cos z &= \sin(z+\frac{\pi}{2})\\ \sin z &= \sin(\pi - z)\end{aligned}$$

ovat voimassa myös kompleksisille trigonometrisille funktioille.

2. Jaa funktio $\tan(x+iy)$ reaali- ja imaginääriosiinsa ja osoita, että Cauchyn-Riemannin yhtälöt ovat voimassa.

3. Osoita, että $|\sinh y| \leq |\cos z| \leq \cosh y$ ja $|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$, kun $z = x+iy$. Päättele tästä, että kompleksiset kosini- ja sinifunktiot eivät ole rajoitettuja.

4. Hae seuraavien lausekkeiden kaikki arvot ja piirrä muutamia niistä kompleksitasoon: a) $\ln(e^{2i})$, b) $\ln(1.3+2.8i)$, c) $(5-2i)^{3+\pi i}$.

5. Ratkaise a) $\ln z = -2 - \frac{3}{2}i$, b) $z^{3/4} = -1+i$.

6. a) Mille alueelle kuvaus $w = 1/z$ kuvaa alueen $|z-3| < 2$? b) Entä kuvaus $w = \mathrm{Ln}(z)$ (päähaara) "punkteeratun" alueen $0 < |z| \leq 1$? Piirrä kuvat!